



[Jukka O. Mattila](#)

Puheenjohtaja, Suomen Lähilukioyhdistys
Puheenjohtaja, Suomen Laatu yhdistys ry:n
[Osaamisen kehittämisfoorumi OKF](#)

Torpankuja 6
13880 Hattula

jukka.o.mattila@pp.inet.fi
+358 (0)50 9101 596

October 2017

1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonacci-luvut ja matemaattinen kauneus luonnossa

Fibonacci number sequence and mathematical beauty in nature

Prof. Joonas Kokkonen: *"Perusoivallus koski oopperan kokonaisrakennetta: toisen näytöksen on suhtauduttava ensimmäiseen kuten ensimmäinen näytös suhtautuu koko oopperaan"*.

Voikukat, kävyt, auringonkukat, ruusut, kaktukset, kotilot, tienvarren aurausmerkit, kanit, Joonas Kokkonen Viimeiset kiusaukset – kaikissa yksinkertaisten lukujen ja kultaisen leikkauksen arvoituksellista kauneutta. Kymmeniä kirjoittajan omia valokuvia elämän varrelta.

Jo lapsuudessa olemme tottuneet liittämään yksinkertaisia kokonaislukuja joihinkin luonnon kohteisiin. Tiedämme esimerkiksi, että apilanlehti on useimmiten kolmiosainen ja että mansikankukassa on viisi terälehteä. Myöhemmin olemme kenties oppineet, että elävän organismin rakenteet perustuvat usein 5-jakoiseen symmetriaan kun taas elottoman luonnon symmetrialuku on 6 (esim. lumikiteet).

Edelläkerrottua enempiä ei juuri yleisesti tiedetä luonnon rakenteiden ja kokonaislukujen välisestä säännönmukaisuudesta. Olemme tottuneet siihen, että luonto toimii enemmän tai vähemmän umpimähkäisesti.

Esityksessä käsitellään erään yksinkertaisen lukujonon esiintymistä luonnossa. Tämän ns. fibonacci-jonon kukin jäsen on aina kahden edellisen summa: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Fibonacci-jonon luvut esiintyvät luonnon rakenteissa pareittain ja liittyvät useimmiten spiraalirakenteisiin. Kuten jokainen tietää, tavallisen kuusenkävyyn peitinsuomut muodostavat käpyä sivulta tarkasteltaessa kaksi spiraalirakennetta, nousevan ja laskevan. Kuusenkävyssä näiden spiraalien lukumäärät (kävyyn ”vyötäisten” ympäri laskien) ovat tavallisesti 5 ja 8, joskus 8 ja 13, joka tapauksessa lähes poikkeuksetta fibonacci-jonon lukuja.

Männyn kävyissä vastaavat luvut ovat tyypillisesti 3 ja 5 tai 5 ja 8. Esityksessä käsitellään fibonacci-lukujen esiintymistä lähes 20 eri kasvilajissa. Esityksen pienimmät luvut, 2 ja 3 ovat bulgarialaisesta ruususta, suurimmat, 89 ja 144, unkarilaisesta auringonkukasta. Esityksen erikoisin yksilö on pienen pieni keltainen päivänkakkara, jonka sisäkkäisissä terioissa esiintyy peräti neljä peräkkäistä fibonacci-lukua: 8, 13, 21 ja 34.

Fibonacci-lukujen esiintymistä eläinkunnassa käsitellään kahden esimerkin valossa: kaniinien lisääntyminen ja kotilon kuoren gnomoninen omaa muotoaan monistava rakenne.

Kun fibonacci-jonon kukin jäsen jaetaan edeltäjällään, saadaan uusi lukujono, joka suppee hämmästyttävän nopeasti kohti taiteilijain suosimaa kultaisen leikkauksen suhdetta 1,618... Esimerkkinä käsiteltävän bulgarialaisen pujon haarottuminen tarjoaa kultaiselle leikkaukselle luonnollisen perustelun: mahdollistaa sateen ja auringonvalon tasainen jakautuminen.

Esityksen lopulla analysoidaan matemaattisen kauneuden käsitettä sekä otetaan kriittisesti kantaa eräisiin taiteilijanvapauksiin, jotka ovat ristiriidassa esitelmässä käsitellyn luonnontieteellisen todellisuuden kanssa.



Lehtori Jukka O. Mattila tyttäriensä Merin ja Elinan kanssa laskemassa ananashedelmien kierrelukumääriä.

Fibonacci-luvuista kultaiseen leikkaukseen Luonnon kauneutta matemaatikon silmin

Kesänurmella lekotellessaan jokainen on huomannut apilanlehden kolmijakoisuuden. Yhtä yleisesti tiedetään, että mansikankukassa on viisi terälehteä ja että useimmat lumikiteet ovat kuusihaaraisia.

Luontoäidin laskuoppi sisältää yksityiskohtaiset ohjeet siitä, miten elollinen ja eloton aines rakentuu. Kasvit eivät suinkaan kasva ja rehota niin sattumanvaraisesti, kuin ensisilmäyksellä saattaa näyttää.

"Kerran, vuosia sitten, kuljin erään arvostetun fyysikkoystäväni kanssa metsässä. Poimin maasta aivan tavallisen kuusenkävyä, jonka pintaa koristivat suomujen muodostamat nousevat ja laskevat kierteet. Pyysin ystävääni laskemaan, montako kierrettä kulki ylös- ja montako alaspäin täydellä kierroksella kävyn vyötäisten ympäri. Tehtävä ei tuntunut seuralaistani kiinnostavan, mutta hartaitten pyyntöjeni jälkeen hän kuitenkin ryhtyi vastahakoisesti toimeen. Hetken käveltyämme poimin maasta uuden kävyn ja pyysin häntä taas laskemaan. Tuloksen saatuaan ystävääni rypisti kummeksuen kulmiaan, muttei sanonut mitään. Kappaleen matkaa kuljettuamme annoin hänelle taas uuden kävyn. Laskettuaan myös sen suomukierreet ystävääni pysähtyi, katsoi tutkivasti silmiini ja kysyi vakavasti: "Pelleiletkö sinä minun kustannuksellani?"

Noiden kolmen aivan sattumanvaraisesti valitun kävyn suomukierreet olivat täysin samat: toiseen suuntaan niitä oli viisi ja toiseen suuntaan kahdeksan. Kumppanini ei ollut osannut tällaista säännöllisyyttä", eurajokelainen lehtori Jukka O. Mattila johdatteli kuuntelijoita luonnon matemaattisen kauneuden teemaan matemaattikkaviikoilla Porissa pitämässään luonnossa.

Hämmästyttävää samanlaisuutta

Käpyjen kierrelukujen yhtenevyys ei voinut olla pelkkä sattuma. Lehtori Mattila tutki kokonaisen säkkillisen grillitarpeiksi kerättyjä kuusenkäpyjä — ja tulos oli ällistytävä. 281 kävystä peräti 255:ssä oli toiseen suuntaan viisi ja toiseen kahdeksan kierrettä!

Loppujenkaan rakenne ei ollut aivan sekalainen: kierreluvut kahdeksan ja 13 olivat vallitsevia runsaassa 20 yksilössä. Täydellisiä "mustia lampaita" oli koko joukossa vain viisi.

Havainnoistaan innostuneena lehtori Mattila päätti tarkastella myös muita kasveja. Olisikohan niissäkin jokin kierreluku yleisempi kuin toinen?

— Voikukan kukinto näyttää ensisilmäyksellä hyvin sekaiselta, eikä useimpien tule edes mieleen yhdistää siihen mitään lukuja. Tarkasti katsoen voi paljaassa kukkapohjassa kuitenkin erottaa selvän spiraalirakenteen sekä myötä- että vastapäivään. Valtaosassa voikukista on 21 ja 34 kierrettä, kun taas auringonkukassa kukkapohjassa ovat vallitsevina lukuina 55 ja 89. On huomattava, että molemmat luvut ovat yhtä yleisiä sekä myötä- että vastapäivään kulkevissa kierteisissä.

— Ananashedelmistä on erityi-

sen helppo laskea kierrelukuja, jotka yleisimmän ovat kahdeksan ja 13. Laskekaa vaikka itse hedelmäkaupassa pistäytyessänne, lehtori Mattila nauratti kuulijoitaan.

Mutta mitä merkitystä näillä luvuilla sitten on?

Kun näistä neljästä esimerkkikasvista saadut kahdeksan kierrelukua (5, 8, 13, 21, 34, 55 ja 89) asetetaan suuruusjärjestykseen, ollaan asian ytimessä. Hajanaisesta numerojoukosta on yhtäkkiä muotoutunut pala fibonacci-jonoa, jonka peräkkäisten lukujen on havaittu selittämättömän usein esiintyvän pareina luonnon spiraalirakenteissa.

Fibonacci-lukuja kotilossa

Fibonacci-lukujonon keksi keskiajan huomattavimmaksi ja tuoteliimmaksi matemaatikoksi kututtu Leonardo di Pisa, lempinimeltään Fibonacci.

Seurattuaan isäänsä kauppatyöillä kaikkialle hän toi arabialaisen merkintätavan Eurooppaan vuonna 1202 julkaisemansa kirjan, Liber Abacin, välityksellä.

Lukujono syntyi, kun Fibonacci tarkasteli kaniinin lisääntymistä pohtien, montako poikasparia tuotti kuukausittain yksi alunperin olemassaoleva kaniinipari, jos oletet-

tiin, että joka kuukausi syntyi uusi pari, joka tuli kahden kuukauden kuluttua lisääntymiskykyiseksi.

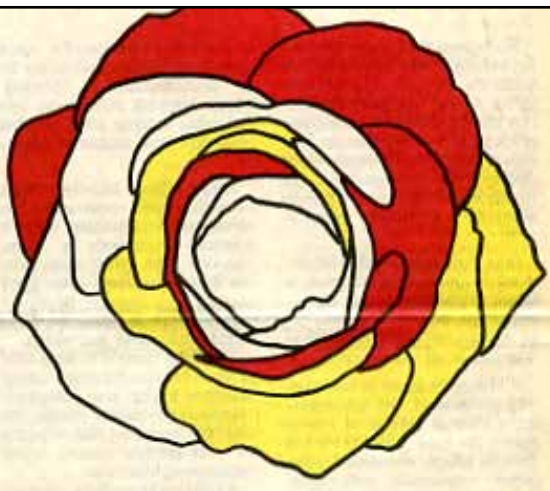
Sekä aikuisten että nuorten kaniinien lukumäärästä, samoin kuin yksilöiden yhteenlasketusta määrästä saatiin fibonacci-lukujen jono (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), jonka jokainen jäsen on kahden edellisen summa.

Luonnossa fibonacci-jonoon kuuluvia lukuja voi löytää mitä erilaisimmista kasveista, joiden rakenteessa esiintyy kierteisyyttä. Ja onpa lukujonoa myötäilevää kasvua havaittu jopa spiraalimaisessa kotilossakin, jonka kovan kuoren kasvu perustuu tietyn spiraalirakenteen toistoon.

Kasveista fibonacci-lukuja voi löytää, paitsi kukinnoista ja hedelmistä, myös tutkimalla lehtiasentoa, eli tapaa, jolla lehdet tai oksat sijoittuvat runkoon.

Lehtiasenoltaan kierteisissä kasvilla peräkkäisten oksien haarumakohdat sijoittuvat varteen niin, että syntyy vaikutelma joko myötä- tai vastapäivään kiertävästä, ylöspäin nousevasta spiraalista. Tällaisesta kasvista lehtori Mattila löysi esimerkin Bulgariasta, Mustan meren rannikolta.

— Oli vaikea löytää tarkasteltavaksi kasvia, joka olisi saanut kasvua luonnolliseen muotoonsa vapaasti, minkään toisen häiritsemättä. Kerran matkallani huomasiin



Bulgarialainen ruusu ja sen terälehtien fibonacci-analyysi. Havaitaan, että terälehdet muodostavat kolme vastapäivään kiertävää spiraalia. Löytääkö lukija myötäpäivään kiertävät spiraalit? Niitä on kaksi.

kuitenkin pujon sukulaiskasvin, jossa oksat olivat jakautuneet varren ympärille niin kauniin tasaisesti, että matemaattista säännönmukaisuutta oli suurella todennäköisyydellä odotettavissa, lehtori Mattila selvitti.

Valokuvasta mitattiin jälkepäin kaikkien peräkkäisten haarojen väliset kulmat. Ne olivat suurin piirtein yhtä suuret, noin 137 astetta. 137 astetta jakaa kasvin varren 360 asteen suuruisen ympäryksen...kuinkas muuten kuin kultaisen leikkauksen suhteessa.

Fibonacci-luvut ja kultainen leikkaus

Kultainen leikkaus on kiehtonut ihmismieltä jo tuhansia vuosia.

Tämä niin sanottu jumalallinen suhde tuntuu olevan sisäänrakennettuna ihmisen esteettiseen tajuntaan. Taivaanrantaa hahmottelava taiteilija esimerkiksi osaa vaistomaisesti jakaa paperin viivalla vaistomaisesti kahteen puoliskoon, joista pienemmän suhde suurempaan on sama kuin suuremman suhde kokonaisuuteen.

Tavallistakin ihmistä miellyttää eniten suorakulmio, jonka sivut ovat kultaisen leikkauksen suhteessa. Saksalainen psykologi, Gustav Fechner, mittasi viime vuosisadan lopulla koko joukon arkielämässä esiintyviä suorakulmioita, mm. tauluja, ovia, ikkunoita, kirjoja ja postikortteja, ja sai havaita niiden sivujen olevan varsin lähellä kultaisen leikkauksen suhdetta.

Mutta mitä tekemistä kultaisella

leikkauksella on fibonacci-lukujen kanssa?

Koska peräkkäiset fibonacci-luvut esiintyvät luonnossa pareina, on mielenkiintoista kokeilla, mitä tapahtuu, kun jokainen jonon luku jaetaan edeltäjällään (esimerkiksi 1:1=1, 2:1=2, 3:2=1,5, 5:3=1,666...).

Mitä ihmettä! Fibonacci-lukujen jakotulokset lähestyvät kultaisen leikkauksen arvoa 1,6180 vuorotellen molemmilta puolilta. Kun on tehty 10. laskutoimitus, eli jaettu peräkkäiset fibonacci-luvut 89 ja 55, ovat jo neljä ensimmäistä numeroa samat kuin kultaisessa leikkauksessa arvossa.

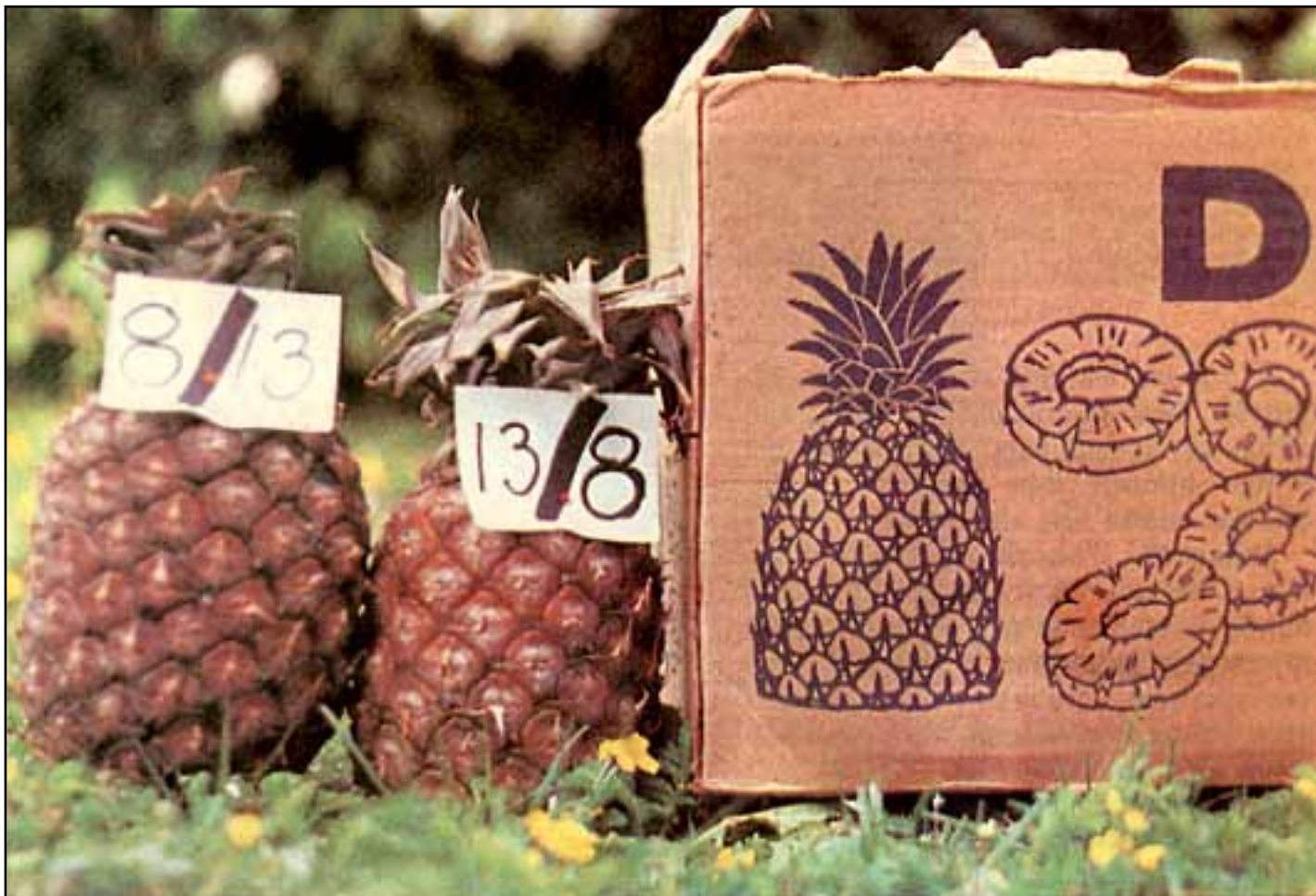
Miksi näin käy? Varmaa vastausta ei vieläukaan tiedä samoin kuin ei sitäkään, miksi sekä kultainen leikkaus että

fibonacci-luvut esiintyvät toistuvasti luonnon rakenteissa.

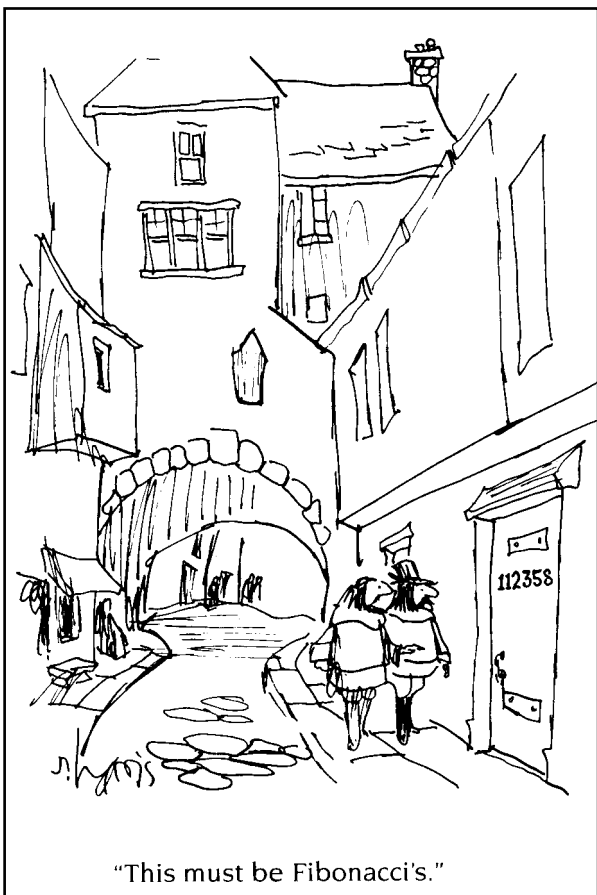
On kuitenkin oletettavaa, ettei luonto halua kasata rakenteisiinsa fibonacci-lukuja tai kultaisia leikkauksia pelkästään niiden itsensä vuoksi. Molempien täytyy siis olla seurausta jostain, mutta mistä, siihenkään ei toistaiseksi ole löydetty yleisesti hyväksyttyä selitystä.

Meidän tavallisten ihmisten osana on siis tyytyminen lopputuloksen tarkasteluun. Eikä siinä osassa ole valittamista, sillä luonto osaa hioa matemaattisen kauneuden huippuunsa todella mestarillisesti, fibonacci-lukuja, kultaista leikkausta ja kasvamisen ihmettä apuna käyttäen.

*Teksti: Minna Torppa
Kuvat: Jukka O. Mattila
ja Rainer Nikkanen*



Taitelijat eivät tunne ananasten kierrelukuja. Ne kuvataan toistuvasti virheellisellä tavalla yhtä suuriksi, kuten tässäkin ananaslaatikon kyljessä olevassa piirroksessa.



"This must be Fibonacci's."

Piirros:
American Journal of Physics,
Vol. 63, No 1,
January 1995



Kirjoittajan luonnosta tapaamat suurimmat fibonacci-luvut 89 ja 144, auringonkukan teriön ulkokehällä.

Seuraavalla sivulla juttu taitelija Mario Merzin taideteoksesta Turun energialaitoksen savupiipussa

KIERTEISRAKENTEINEN KASVIKUNTA kiehtoo matemaatikkoa

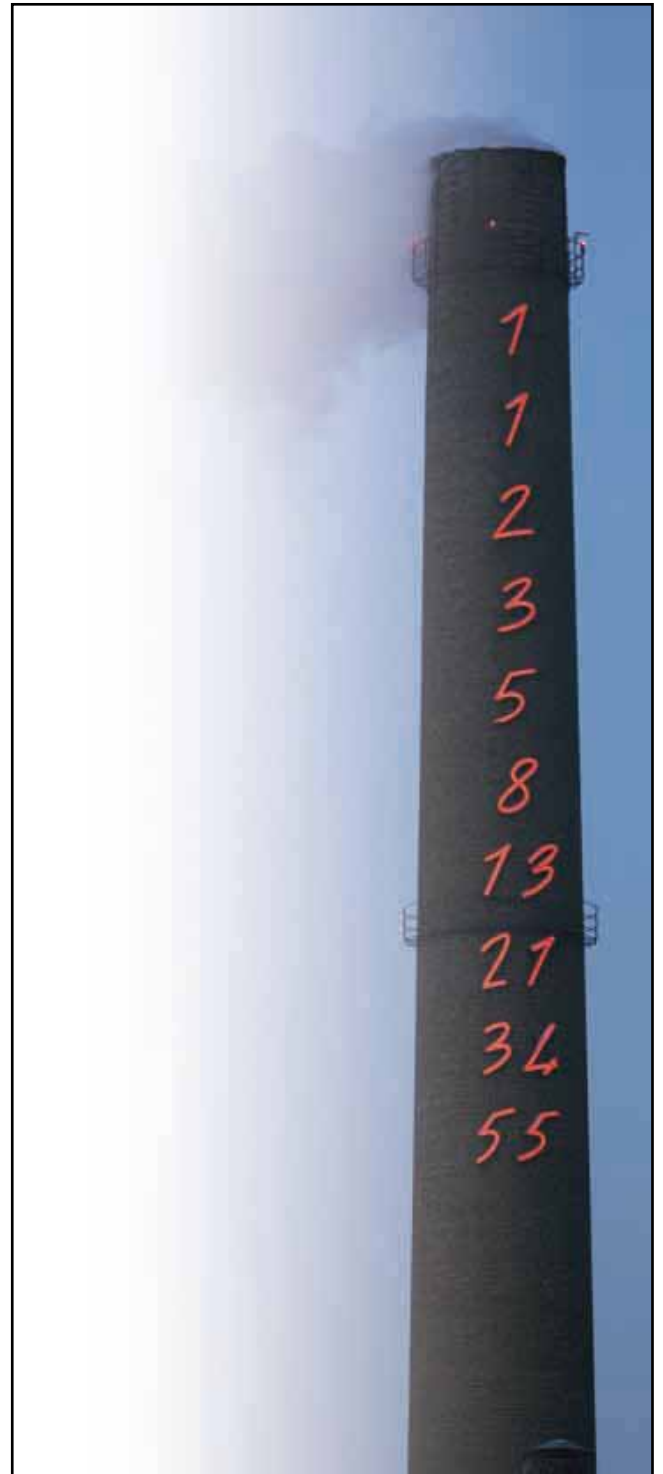
Teksti: Ulla-Maija Kantola

Mitä yhteistä on kävyllä, auringonkukalla, kultaisella leikkauksella ja Turku Energian piipulla? Vihje löytyy viimeksi mainitun taideteoksesta.

Turku Energian piipussa komeileva numerosarja on itse asiassa fibonacci-lukujono. Sama ilmiö löytyy lisäksi useasta kasvikunnan edustajasta, ja se liittyy myös taitelijoiden käyttämään kultaiseen leikkaukseen.

- Fibonacci-lukujono on yksinkertaisesti jono, jossa kukin luku on kahden edellisen luvun summa. Tietävästi ensimmäinen kirjallinen esitys aiheesta on 1200-luvulta, jolloin sen esitti Leonardo di Pisa, lempinimeltään Fibonacci. Fibonacciin kunniaksi luetaan se, että meillä on Euroopassa arabialainen numerojärjestelmä roomalaisen sijaan, kertoo Paraisten lukion rehtori, matemaatikko Jukka O. Mattila.

- Fibonacci käytti lukujonosta kertoessaan esimerkkinä kaniinien lisääntymistä. Aina seuraavassa sukupolvessa olevien jälkeläisten lukumäärä noudatteli teoriassa fibonacci-lukujonoa, Mattila jatkaa. 1980-luvun alkupuolella Jukka O. Mattila oli Bulgariassa pidettyjen fysiikkaolympialaisten Suomen joukkueen johtajana. Mattila kuvasi Bulgarian rannikkoseudulla erilaisia kasveja, joista hän etsi fibonacci-lukuja. Myöhemmin hän on kuvannut auringonkukkia Unkarissa ja lukuisia kasveja Suomessa. Mattilalla onkin ainutlaatuinen kokoelma väridioja, ja hän on pitänyt diaesityksiä ja luentoja aiheesta Suomen lisäksi ympäri Eurooppaa sekä Yhdysvalloissa. Mattila on tuottanut alkuperäismateriaalia fibonaccilukujen esiintymisestä kasveissa, kuten erilaisissa kävyissä ja mykerökukkaisissa.



- Minkä tahansa metsästä poimitun, hyvin muodostuneen kävyn suomurakenteesta voi laskea fibonacciluvun. Kävyn vyötäisiltä kierteisrakenteisia suomujonoja voidaan laskea nousevaan suuntaan ja laskevaan suuntaan. Lukumäärät eivät koskaan ole samat. Männynkävyssä saattaa olla kolme kierrettä ylöspäin ja viisi kierrettä alaspäin, kuusenkävyssä viisi/kahdeksan tai kahdeksan/kolmetoista. Auringonkukan teriöstä olen löytänyt suurimmat kierrelukumäärät 55/89. Siitä, mistä tämä kasveissa vallitseva ilmiö johtuu, ei vielä ole tieteellistä yksimielisyyttä, Mattila toteaa.

Kultainen leikkaus liitetään yleisimmin kuvataiteeseen. Kyseessä on se linja, johon taulua katsottaessa silmä ensin kohdistuu. Mattila liittää kultaisen leikkauksen myös matematiikkaan.

- Kultaisessa leikkauksessa suuremman ja pienemmän osan suhde on 1,618 ja niin edelleen. Kun fibonacci-lukujonon luvun jakaa sitä edeltävällä luvulla, jonon luvut liikkuvat kultaisen leikkauksen suhdeluvun lähistöllä, kertoo Mattila.