



## AVOIN SARJA

Kirjoita tekstaten koepaperiin

**oma nimesi, kotiosoitteesi, sähköpostiosoitteesi, opettajasi nimi sekä koulusi nimi.**

Kilpailuaikaa on 100 minuuttia.

**Sekä tehtävä- että koepaperit palautetaan kilpailun loputtua.**

- Määritä putoamiskiihtyvyyshelurin avulla sopivaa graafista esitystä käyttäen.

Välineet: statiivi, jossa ripustuskoukku; punnus, lankaa, sekuntikello, metrimitta, sakset

### Ratkaisu:

Pienikokoinen punnus kevyen langan päässä on riittävän tarkasti matemaattinen heiluri, jonka heilahdusajan lauseke on  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , missä  $l$  on heilurin pituus ja  $g$  putoamiskiihtyvyys. Korottamalla yhtälö puolittain

toiseen saadaan  $T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} = \frac{4\pi^2}{g} l$ , missä  $\frac{4\pi^2}{g}$  on  $l, T^2$ -koordinaatistossa mittaustuloksiin sovitettun suoran fysikaalinen kulmakerroin  $\frac{\Delta T^2}{\Delta l} = k'$ .

Eräissä mittauksessa saatiin seuraavat tulokset:

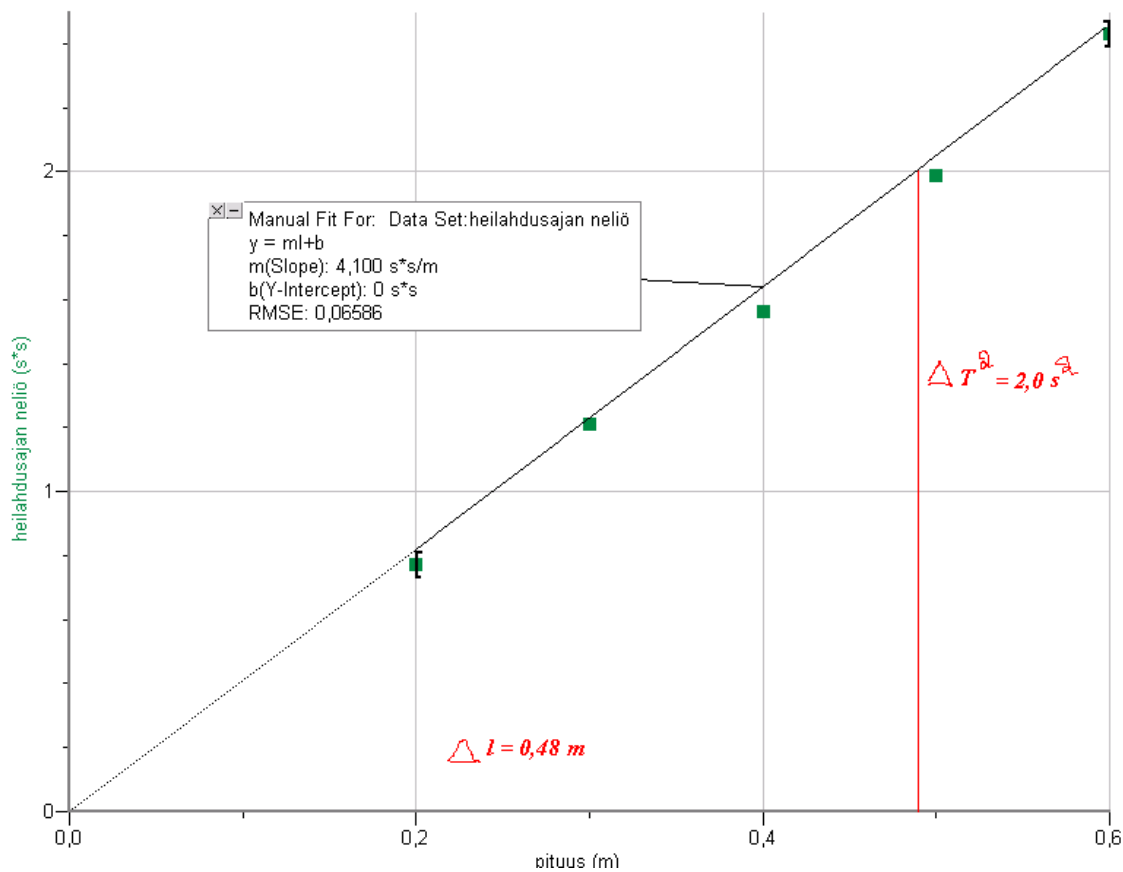
pituus (m)	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
heilahdusaika (s)	0,88	1,10	1,25	1,41	1,56

Kun piirretään  $l, T^2$ -kuvaaja, saadaan origon kautta kulkeva suora  $T^2 = k'l$ . (Systemaattinen mittauserhe tai muu vastaava seikka voi aiheuttaa sen, että suora ei kuljekaane origon kautta. Tällöin suoraa ei tarvitse pakottaa kulkemaan origon kautta, mutta vakiotermin olemassaoloa on syytä kommentoida.)

Verrannollisuuskerroin on suoran fysikaalinen kulmakerroin.

$$k' = \frac{\Delta(T^2)}{\Delta l} = \frac{2,0 \text{ s}^2}{0,48 \text{ m}} = 4,16 \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \approx 4,2 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$$

Mittauksen perusteella putoamiskiihtyvyyden arvoksi saatiin  $g = \frac{4\pi^2}{k'} = \frac{4\pi^2}{4,16 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = 9,49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .



- pisteitys: menetelmän kuvaus (matemaattinen heiluri) 1p  
 yhtälön johto 1p  
 huolelliset mittaukset 1p  
 graafinen esitys 1p  
 kulmakerroin 1p  
 järkevä arvo putoamiskiihtyvyydelle 1p

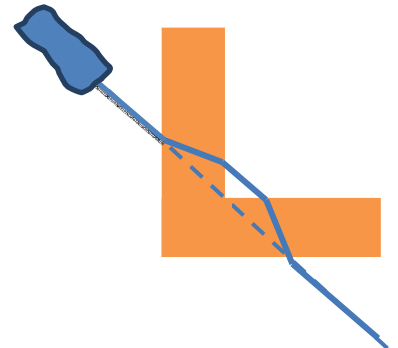
suora pakotetaan kulkemaan origon kautta, vaikka se selvästi ei näin tee -1p

## 2. Valitse mielestäsi sopivin vaihtoehto ja perustele valintasi.

- i) Valokuvaaja haluaa ottaa kuvan sateenkaaresta, mutta huomaa harmikseen, että sateenkaari ei mahdu kokonaan kuvaan. Vanhassa kamerassa ei ole zoomia, joten saadaksesen koko sateenkaaren näkymään kuvassa  
 c) hän ei voi tehdä mitään, sillä sateenkaaresta näkyy joka tapauksessa aina vain osa.

Sateenkaari syntyy, kun auringon valo taittuu vesipisaraan, heijastuu pisaran takaseinästä ja taittuu vesipisarasta ulos. Koska eriväristen valojen taitekertoimet ovat hieman erilaisia, eri värit erottuvat toisistaan taittumisen seurauksena. Punainen valo, joka taittuu vähiten ja on sateenkaaren alareunassa, tulee kameraan  $41^\circ$  kulmassa vaakatasosta. Vastaavasti violetti valo, joka taittuu eniten ja on sateenkaaren yläreunassa, tulee kameraan  $43^\circ$  kulmassa vaakatasosta. Nämä kulmat eivät muutu, vaikka kameraa siirrettäisiin kauemmaksi tai lähemmäksi; valo vain tulee eri pisaroista. (Kuva kertoo tuhat sanaa...)

- ii) Lasersäde suunnataan  $45^\circ$  kulmassa kuvan mukaisesti lasinpalaan, joka on L-kirjaimen muotoinen ja jonka haarat ovat yhtä leveät. Jos lasinpalaa ei olisi, laservalo kulkisi katkoviivaa pitkin L:n sisäkulman kohdalta. Kun laservalo kulkee lasinpalan läpi, säde  
 b) kulkee lasinpalasta tullessaan katkoviivaa pitkin.



(Ks. kuvaan piirretty valonsäteen kulkureitti.) Ensimmäinen tulokulma ja toinen taitekulma ovat yhtä suuret eli  $45^\circ$  valonsäteen käänteisen kulun perusteella. Samoin kolmas tulokulma ja neljäs taitekulma ovat  $45^\circ$ .

- iii) Kuperan linssin yläosa peitetään vihreällä suodattimella ja alaosa punaisella suodattimella. Linssin valkoisesta kynttilästä valkokankaalle muodostama kuva on  
 c) yksivärinen.

Kuvan jokaiseen kohtaan tulee valoa linssin jokaisen kohdan läpi. Niinpä kuvan väri on punaisen ja vihreän valon sekoitus eli keltainen (siis ei pelkkä punainen eikä pelkkä vihreä).

- iv) Avaruuteen lähetettävät instrumentit halutaan pakata suojakuoreen, joka absorboi mahdollisimman vähän energiaa auringon puolelta ja emittoi mahdollisimman vähän energiaa auringosta poispäin olevalta puolelta. Suojakuoren  
 c) kummankin puolen on oltava vaaleita.

Vaalea pinta sekä absorboi että emittoi vähemmän sähkömagneettista säteilyä. Tumma pinta absorboi tehokkaasti esimerkiksi infrapunasäteilyä ja myös lähettää säteilyä tehokkaasti.

pisteitys:  $\frac{1}{2}$ p valinta + 1p perustelu / kohta

3. Lentokoneen ohjaamon tuulilasin täytyy kestää raekuuroja ja lintujen osumia suurilla nopeuksilla. Tuulilasi valmistetaan keroksista lasia, akryyliä sekä erilaisia polymeerimuoveja ja ne ovat useita senttejä paksuja [1]. Euroopan lentoturvallisuusvirasto on määritellyt suurille lentokoneille, johon matkustajalentokoneet kuuluvat, turvallisuusrajan [2]: tuulilasin tulee kestää massaltaan 1,8 kg linnun osuma tyypillisellä matkanopeudella  $V_C$ .



Finnairin Airbus A320-200 ilmoittaa matkanopeudekseen 840 km/h. Raporttien mukaan lentokoneet törmäävät muutaman kilometrin korkeudella vuosittain useisiin lokkeihin. Harmaalokin lentonopeus on n. 10 m/s ja sen enimmäismassa 1,8 kg.

- a) Laske arvio turvallisuusrajan mukaisen linnun ja lentokoneen törmäyksen kestolle. (2p)  
 b) Käytä arviotasi törmäyksen kestolle ja laske, kuinka suuren voiman keskimäärin lintu kohdistaa tuulilasiin törmäyksen aikana. (4p)

[1] [http://yle.fi/uutiset/sarot\\_lentokoneen\\_tuulilasissa\\_melko\\_yleisia/5300912](http://yle.fi/uutiset/sarot_lentokoneen_tuulilasissa_melko_yleisia/5300912)

[2] Bird Strike Damage & Windshield Bird Strike Final Report. Euroopan lentoturvallisuusvirasto EASA. Noudettu osoitteesta <http://easa.europa.eu/rulemaking/docs/research/Final%20report%20Bird%20Strike%20Study.pdf>

### Ratkaisu:

a)

Törmäyksen kestolle voidaan arvioida suuruusluokkaa esimerkiksi lentokoneen nopeudesta ja linnun koosta. Olkoon tyypillinen harmaalokki arviolta pituudeltaan nokasta räpylöihin  $d = 1 \text{ m}$ . Lentokoneen nopeus taas

on  $v = 840 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 233,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Tällöin lentokone kulkee (paikallaan olevan) linnun päästä päähän ajassa  $t = \frac{d}{v} = \frac{1 \text{ m}}{233,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,004285 \dots \text{s} \approx 4 \text{ ms}$

. Arvio on kevyesti yläkanttiin, sillä lintuhan liikkuu myös. Käyttämällä nopeutena linnun ja koneen suhteellista nopeutta, saadaan pyöristystarkkuudella sama arvio  $t = 4 \text{ ms}$ . Suuruusluokaltaan arvio on mielekäs.

b)

Voimat voidaan esittää liikemäärän muutoksina aikayksikköä kohti, eli  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ . Voiman suuruus voi vaihdella törmäyksen aikana, mutta tarkastellessa liikemäärään muutosta kokonaisuudessaan ja törmäyksen kokonaiskestoa saadaan keskimääräinen törmäyksessä tuulilasiin kohdistuva voima. (Tuulilasiin kohdistuu tietenkin myös sen kiinnityksen kautta lentokoneen rungon aiheuttamia voimia, mutta särkyvän näkökulmasta kiinnostava on nimenomaan linnun aiheuttama voima.)

Halutaan selvittää suurin mahdollinen liikemäärän muutos; se tapahtuu epäelastisessa törmäyksessä. Törmäyksessä lintuun kohdistaa voiman ainoastaan tuulilasi, ja lintu kohdistaa tuulilasiin samansuuruisen mutta vastakkaisuuntaisen voiman.

Oletetaan, että massiivisen lentokoneen nopeus ei muutu törmäyksessä.

(Varmistukseksi voidaan tarkastella epäelastista törmäystä, jossa lintu ( $m_1 = 1,8 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) törmäi kohtisuoraan lentokoneen ( $M \gg m_1$ ,  $v = 233,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) tuulilasiin ja jää siihen kiinni. Valitaan positiiviseksi suunnaksi lentokoneen etenemissuunta:

$$Mv - m_1 v_1 = (M + m_1) v'$$

$$v' = \frac{Mv - m_1 v_1}{M + m_1} \approx \frac{M}{M} \left( \frac{v - \frac{m_1}{M} v_1}{1 + \frac{m_1}{M}} \right)$$

Koska linnun massa on mitätön lentokoneen massaan verrattuna (useita tonneja), voidaan arvioida  $\frac{m_1}{M} \approx 0$ .  
Siispä voidaan todeta, että koneen ja linnun törmäyksen jälkeinen nopeus tosiaan säilyy hetkellisestikin muuttumattomana eli  $v' \approx v$ .)

Siispä linnun liikemäärän muutoksen

$$\Delta p = p_{\text{loppu}} - p_{\text{alku}} = m_1 v - (-m_1 v_1) = 1,8 \text{ kg} \cdot \left( 233,33 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 437,994 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

ja lintuun vaikuttava voima

$$F_{\text{kone} \rightarrow \text{lintu}} = \frac{437,994 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{0,0043 \text{ s}} = 101\,859,07 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \approx 102 \text{ kN} \approx 100 \text{ kN}$$

jolloin tuulilasiin vaikuttava voima on samansuuruinen, mutta vastakkais-suuntainen  $F_{\text{lintu} \rightarrow \text{kone}} \approx 100 \text{ kN}$ .

pisteitys: a) menetelmä arviointiin 1p  
hyvä arvio 1p

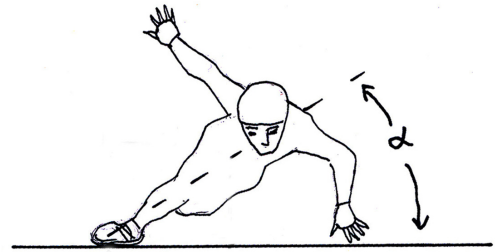
*Huom! Hyväksytään linnun (vartalon) pituudeksi 0,3-1,0 m ja edelleen aika-arvion suuruudeksi 1ms...4 ms.*

b) periaate (voima liikemäärän muutoksesta, lintuun ja tuulilasiin kohdistuvat voimat vastavoimia) 1p  
kimmoton törmäys, lentokoneen massa suuri verrattuna linnun massaan 1p  
(linnun) liikemäärän muutos (lasku) 1p  
lintuun -> tuulilasiin vaikuttava voima (lasku) 1p

*Huom! Eri aika-arvioilla saadaan 100 kN...340 kN.*

4. Pikaluistelija luistelee vaakasuoralla radalla ympyräkaarteeseen tasaisella vauhdilla. Missä kallistuskulmassa  $\alpha$  hänen tulee luistella pysyäkseen pystyssä?

Luistelijan massa varusteineen on 78 kg ja pituus 178 cm. Luistelijan vauhti on 43 km/h ja kaarteeseen säde 8,5 m.



### Ratkaisu:

Tarkastellaan liikettä x- ja y-suunnissa:

Dynamiikan peruslain mukaan

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu = m\vec{a}_n, \text{ josta saadaan}$$

$$y: \quad N - mg = 0 \quad (1)$$

$$x: \quad F_\mu = ma_n = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

Luistelija on tasapainossa pyörimisen suhteen, mistä saadaan momenttiehdoksi painopisteen suhteen

$$F_\mu \sin \alpha \cdot l - N \cos \alpha \cdot l = 0 \quad (3)$$

Yhdistämällä lausekkeet (1)-(3) saadaan

$$\frac{mv^2}{r} \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0$$

josta saadaan

$$\frac{v^2}{r} \sin \alpha = g \cos \alpha$$

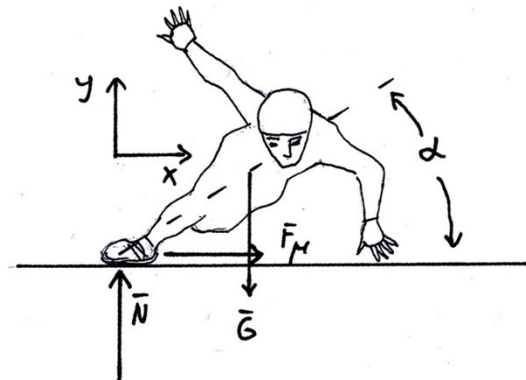
ja edelleen

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{rg}{v^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{rg}{v^2} = \frac{8,5 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{(43 \text{ m/s} : 3,6)^2} = 0,584$$

Kysytty kulma on  $\alpha = 30,30^\circ \approx 30^\circ$

pisteitys: voimakuvio 2p  
etenemisen likeyhtälöt 1p  
momenttiehto 1p  
lausekkeiden yhdistäminen 1p



tulos 1p

5. Rautasydäminen käämi kytkettiin tasajännitelähteeseen, jonka napajännite oli 1,42 V. Virtapiiri suljettiin ja käämin läpi kulkeva sähkövirta mitattiin tietokoneavusteisesti ajan funktiona, jolloin saatiin oheinen kuvaaja.
- Kuinka suuri oli käämin resistanssi?
  - Kuinka suuri on induktiojännite ajan hetkellä 1,5 s?
  - Kuinka suuri oli käämin induktanssi?

**Ratkaisu:**

- a) Sähkövirran suurin ja vakiintunut arvo on kuvaajan perusteella  $I_0 \approx 0,042 \text{ A}$ . Koska ilmoitettu jännite on napajännite, se on myös yhtä suuri kuin käämin jännite. Kun sähkövirta ei muutu, käämi on vain vastus ja käämin resistanssiksi saadaan

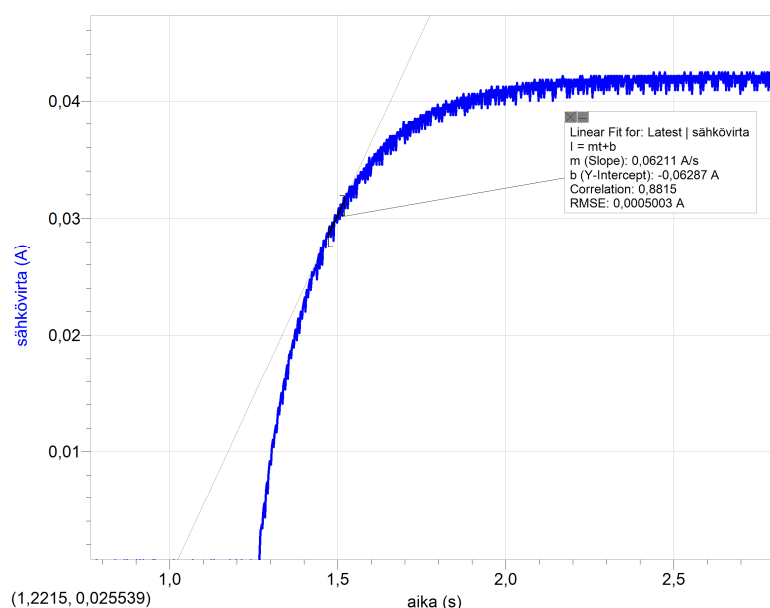
$$R = \frac{U_N}{I_0} = \frac{1,42 \text{ V}}{0,042 \text{ A}} = 33,8 \Omega \approx \underline{34 \Omega}$$

- b) Virran muuttuessa käämiin indusoituu jännite  $\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ , ja jännitehäviö käämissä muodostuu tästä itseinduktiojännitteestä sekä käämin resistanssin aiheuttamasta jännitehäviöstä eli  $U_L = RI - \epsilon_L$  (sähkövirran suuntaan mentäessä potentiaalin muutos on  $-RI + \epsilon_L$ ). Kuvaajalta luetaan, että sähkövirta hetkellä 1,5 s on  $I(1,5 \text{ s}) = 0,030 \text{ A}$ . Toisaalta Kirchhoffin II lain mukaan saadaan  $U_N - U_L = 0$  eli  $U_N - RI + \epsilon_L = 0$ , josta saadaan induktiojännitteeksi:

$$\epsilon_L = -U_N + RI = -1,42 \text{ V} + -33,8 \Omega \cdot 0,030 \text{ A} = -0,406 \text{ V} \approx \underline{-0,41 \text{ V}}$$

- c) Sähkövirran muutosnopeus hetkellä 1,5 s on kuvaajan kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin  $\frac{dI}{dt} = 0,0621 \frac{\text{A}}{\text{s}}$ . Käämin induktanssiksi saadaan

$$L = -\frac{\epsilon_L}{\frac{dI}{dt}} = -\frac{-0,418 \text{ V}}{0,0621 \frac{\text{A}}{\text{s}}} = 6,53 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \approx \underline{6,5 \text{ H}}$$



- pisteitys: a) resistanssi 1p  
 b) idea (virran muuttuessa myös itseinduktiojännite) 1p



- induktiojännite 1p
- c) graafinen derivointi 1,5 sekunnin kohdalla 2p (jos huolimattomasti, vain 1p)  
käämin induktanssi 1p