Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry

LUKION FYSIIKKAKILPAILU 6.11.2012

PERUSSARJA

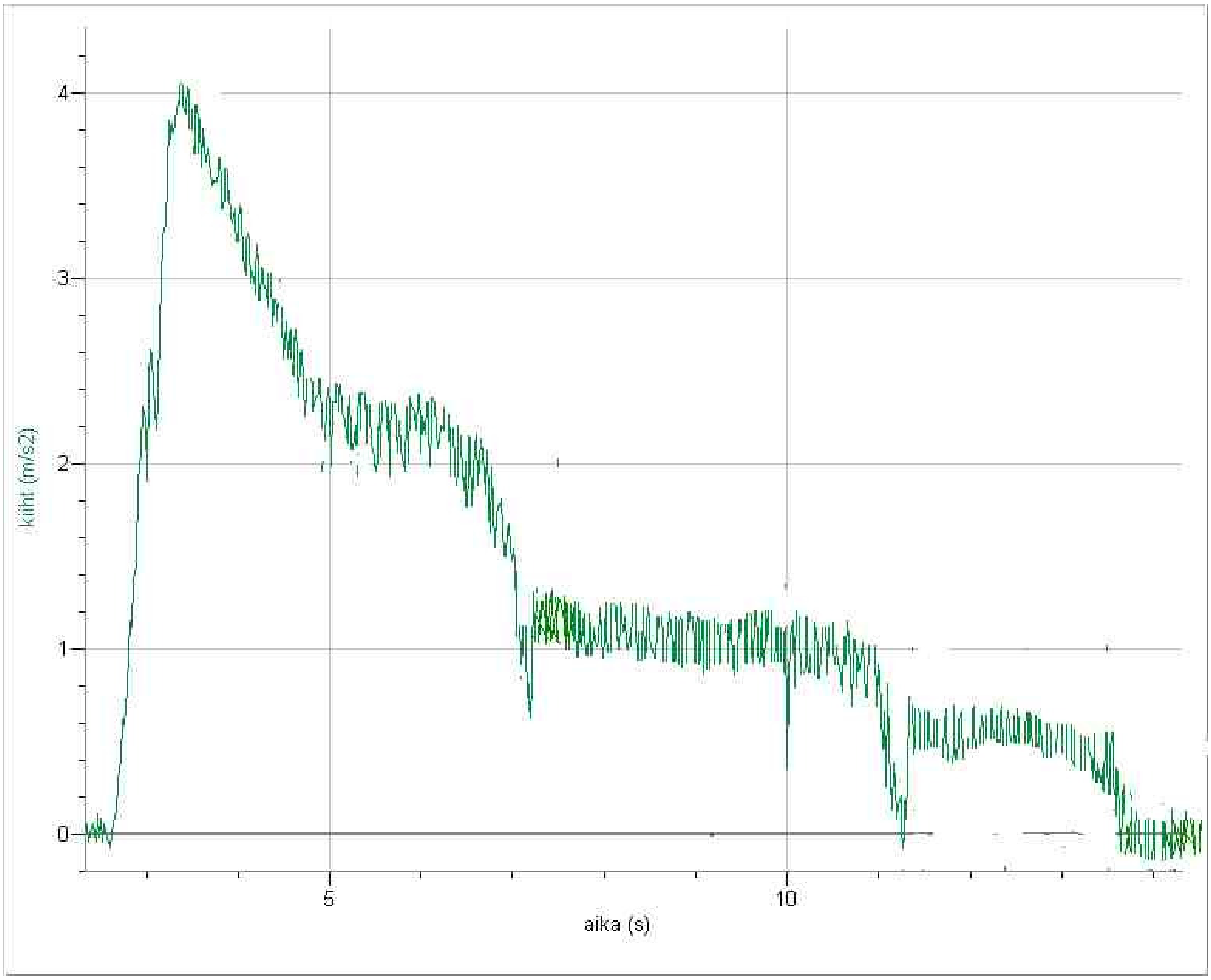
Kirjoita tekstaten koepaperiin

oma nimesi, kotiosoitteesi, sähköpostiosoitteesi, opettajasi nimi sekä koulusi nimi.

Kilpailuaikaa on 100 minuuttia.

Sekä tehtävä- että koepaperit palautetaan kilpailun loputtua.

1. Tietokoneeseen liitetyllä kiihtyvyysanturilla mitattiinautomaattivaihteisen auton kiihtyvyyden kuvaaja ajan funktiona, kun auto läksi liikennevaloista liikkeelle. a) Mikä oli auton suurin kiihtyvyys**1p** b) Tulkitse kuvaajan muoto.**2p**c) Nopeusrajoitus oli 60 km/h.Ajettiinko autolla mittausaikana ylinopeutta?**3p**

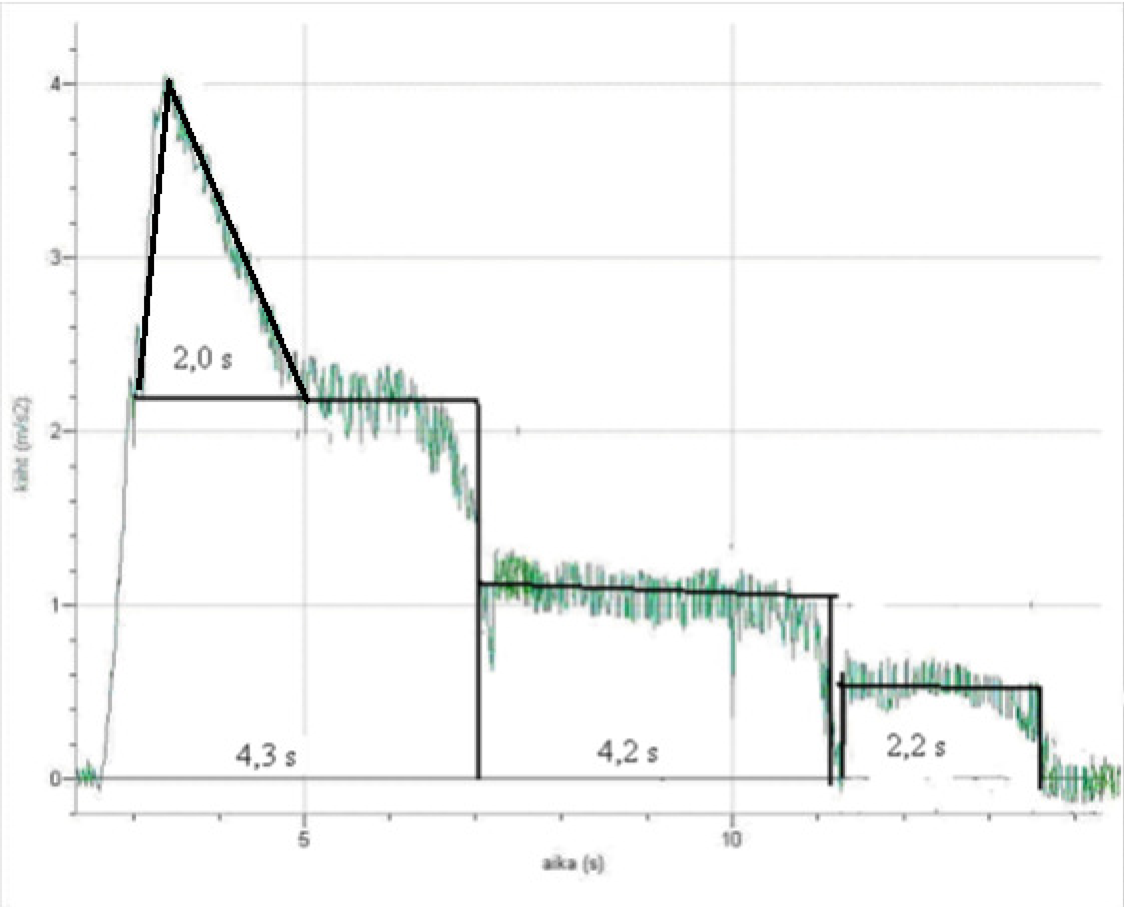


Ratkaisu:

a) Auton suurin kiihtyvyys oli noin $4 m/s^2$. 1p

b)Kiihtyvyys kasvaa tasaisesti savuttaen arvon $4 m/s^2$, jonka jälkeen kiihtyvyys pienenee. Aikavälillä 5..6,5 s kiihtyvyys on likimain tasaista n.$2,2 m/s^2$.
Ajan hetkellä 7 s vaihteisto vaihtaa 2.vaihteelle jonka jälkeen kiihtyvyys on likimain tasaista (n.1 m/s^2) aikavälillä 7..11 s. Ajan hetkellä n. 11s vaihteisto vaihtaa 3.vaihteelle ja ajan hetkestä 13,5 s eteenpäin kuljetaan tasaisella nopeudella. 2p

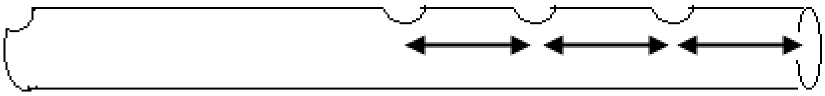
c) Auton nopeus saadaan kuvaajan ja aika-akselin välisenä fysikaalisena pinta-alana. 1p



$$v = \frac{2{,}0\ \text{s} \cdot 1{,}8\ \text{m/s}^2}{2} + 4{,}3\ \text{s} \cdot 2{,}2\ \text{m/s}^2 + 4{,}2\ \text{s} \cdot 1{,}05\ \text{m/s}^2 + 2{,}2\ \text{s} \cdot 0{,}60\ \text{m/s}^2 = 17\ \text{m/s}\ (60\ \text{km/h})$$. **1p**

2. Pajupillin voi valmistaa itse, mutta valmistajan tulee tietää jotain äänestä ja värähtelyistä tehdäkseen pillin, joka ei kuulosta epävireiseltä. Pilli on vireessä itsensä kanssa, mikäli sillä soitettujen äänten taajuuksien suhteet asteikon ensimmäiseen taajuuteen ovat yksinkertaisia murtolukuja. Esimerkiksi tutun sävelkulun C-D-E-F taajuuksien suhteet ovat $\frac{f_C}{f_C}=1$, $\frac{f_D}{f_C}=\frac{9}{8}$, $\frac{f_E}{f_C}=\frac{5}{4}$ ja $\frac{f_F}{f_C}=\frac{4}{3}$.

Alla on yksinkertaisen pillin kaavakuva. Sen rei'ät ovat samalla etäisyydellä toisistaan. Pilliin puhalletaan vasemman laidan pienestä reiästä, ja sen avoin pää on ensimmäisen ei-peitetyn rei'än kohdalla.

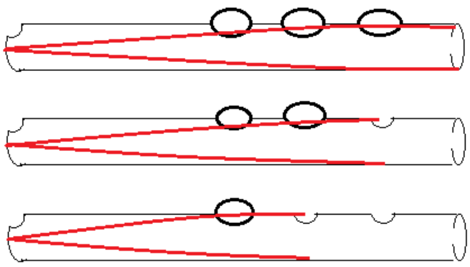


a) Tutki, onko ylläolevan kaltainen pilli koskaan vireessä itsensä kanssa. (4p)

b) Voiko kaavakuvan pillin valmistaa soittamaan säveliä C-D-E-F? (2p)

Ratkaisu:

a) Olkoon pillin pitkä osa pituudeltaan *L* ja kukin lyhyt etäisyys reikien välillä *d*. Soivan osan pituutta l vaihdellaan. Pillillä voi siis soittaa ainakin sävelet 1 $(l_1 = L)$, 2 $(l_2 = L + d)$, 3 $(l_3 = L + 2d)$ ja 4 $(l_4 = L + 3d)$. [0,5p]



Puhalluspäästä pilli on suljettu putki ja toisesta päästä avoin, joten käytetään yhtälöä toisesta päästä avoimelle putkelle. [0,5p]Tutkitaan perustaajuuksia[0,5p]; jos ne ovat vireessä, niin yläsävelet samoin, sillä niiden taajuudet ovat yksinkertaisia murtolukuja perustaajuuksista.

Toisesta päästä avoimelle putkelle soiva pituus on neljäsosa aallonpituudesta $l = \frac{\lambda}{4}$, joten soiva perustaajuus on $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l}$, [0,5p]missä *c* on äänen nopeus ilmassa huoneenlämpötilassa eli 343 m/s.

Pillissä soivat perustaajuudet ovat $f_1 = \frac{c}{4L}, f_2 = \frac{\frac{c}{4}}{L+d}, f_3 = \frac{\frac{c}{4}}{L+2d}$ ja $f_4 = \frac{\frac{c}{4}}{L+3d}$. [0,5p]

Taajuuksien suhteet ensimmäisen taajuuden avulla ilmaistuna ovat vastaavasti

$\frac{f_1}{f_1} = 1$, $\frac{f_2}{f_1} = \frac{L+d}{L}$, $\frac{f_3}{f_1} = \frac{L+2d}{L}$, ja $\frac{f_4}{f_1} = \frac{L+3d}{L}$. [0,5p]

Suhteista nähdään, että pilli on vireessä ainakin, jos pituus L on jokin reikien etäisyyden d moninkerta, esim. 10 cm ja 5 cm. Samoin mikäli molemmat pituudet ovat jonkin muun yksikön moninkertoja, esim. 10 cm ja 3 cm (kumpikin on 1 cm:n moninkerta). [1p esimerkki tai muu todiste]

(Lähes säännönmukaisesti pilli on kuitenkin epävireinen, esim. jos L = 14,7 mm ja d = 2,3 mm, saadaan suhdelukuja 170/147 jne. jotka eivät enää vastaa vaatimusta yksinkertaisuudesta.)

b) Ei voi. [1p] Jos $\frac{f_2}{f_1} = \frac{L+d}{L} = \frac{9}{8}$, niin $\frac{d}{L} = \frac{1}{8}$ ja $\frac{f_3}{f_1} = \frac{L+2d}{L} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ (oikein), mutta $\frac{f_4}{f_1} = \frac{L+3d}{L} = \frac{11}{8} \neq \frac{4}{3}$. [1p todisteista]

3. Teho, jolla lämpöä johtuu jonkin materiaalin läpi, voidaan laskea yhtälöstä $P = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta t}{l}$, missä λ on lämmönjohtavuus, A on pinta-ala, Δt on lämpötilaero pintojen välillä ja l on materiaalikerroksen paksuus. Pienen lumettoman järven pinta-ala on 0,12 km^2 ja jään paksuus 15 cm. Ilman lämpötila on -27°C.

   a) Laske, millä teholla lämpöä johtuu järven jään läpi.

   b) Oletetaan, että lämpö olisi peräisin uuden jään muodostumisesta järveä peittävän jään alapinnalle. Laske, millä nopeudella jäätä muodostuu hetkellä, jolloin järven jään paksuus on 15 cm. Anna tulos sopivaa etuliitettä käyttäen yksikössä m/s, siis muodostuvan uuden jääkerroksen paksuus aikayksikössä.

   c) Talven mittaan järven jäälle sataa paksu lumikerros. Osa jäästä pidetään kuitenkin luistelua varten lumettomana. Vertaile jääkerroksen paksuutta auratulla alueella ja auraamattomalla alueella kevään koittaessa.

<u>Ratkaisu</u>:

a) $\lambda = 2{,}1\,\frac{W}{m\,°C}$

A = 0,12 km^2 = 0,12×10^6 m^2 ja

Δt = 27°C (jään alapinnalla vesi on jäätymispisteessä)

$P = (\lambda \cdot A \cdot \Delta t)/l = (2{,}1\ \mathrm{W}/(\mathrm{m}\,°\mathrm{C})) \cdot 0{,}12 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}^{2} \cdot 27\,°\mathrm{C}$

b) Jos lämpö on peräisin veden jäätyessä ympäristöön vapautuvasta lämpöenergiasta, saadaan $P = \frac{sm}{t}$, missä s on veden ominaissulamislämpö. Sijoitetaan tähän $m = \rho V = \rho A h$, jolloin yhtälöksi saadaan $P = \frac{\rho A h s}{t}$, josta voidaan ratkaista muodostuvan jääkerroksen paksuus aikayksikössä: $\frac{h}{t} = \frac{P}{\rho A s}$.

$$\frac{h}{t} = \frac{45\,360\,000\ \mathrm{W}}{0{,}917 \cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0{,}12 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}^2 \cdot 333\,000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \underline{1{,}2\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

(Kommentteja: Tällä vauhdilla uutta jäätä muodostuisi liki 11 cm vuorokaudessa. Vesimolekyylin suuruusluokka on 1 Å = 10^{-10} m.)

c) Lumikerros toimii eristeenä jään päällä erottaen jään kylmästä ilmasta. Jään yläpinnalla lumen alla lämpötila ei ole niin alhainen kuin lumettoman jään yläpinnalla. Näin ollen lämpöenergiaa ei johdu niin tehokkaasti jään läpi ja lumen alla jääkerros jää ohuemmaksi kuin auratulla alueella.

Pisteytys:
a) 2p
b) 3p
c) 1p

4.

Lentokoneen ohjaamon tuulilasin täytyy kestää raekuuroja ja lintujen osumia suurilla nopeuksilla. Tuulilasit valmistetaankin kerroksista lasia, akryyliä sekä erilaisia polymeerimuoveja ja ne ovat useita senttejä paksuja [1]. Euroopan lentoturvallisuusvirasto on määritellyt suurille lentokoneille, johon matkustajalentokoneet kuuluvat, turvallisuusrajan [2]: tuulilasin tulee kestää massaltaan 1,8 kg linnun osuma tyypillisellä matkanopeudella V_C.

Finnairin matkustajalentokone Boeing Airbus A320-200 ilmoittaa matkanopeudekseen 840 km/h. Raporttien mukaan lentokoneet törmäävät muutaman kilometrin korkeudella vuosittain useisiin lokkeihin. Harmaalokin lentonopeus on n. 10 m/s ja sen enimmäismassa 1,8 kg.

a) Laske tuulilasiin kohdistuva energia törmäyksessä, jonka Airbus A320:n tuulilasin säädöksen mukaan tulee kestää. (4p)

b) Kestäisikö tuulilasi törmäyksen kanadanhanheen (massa 3.6 kg, nopeus 20 m/s) koneen noustessa ilmaan nopeudella 240 km/h? Perustele. (2p)

[1] http://yle.fi/uutiset/sarot_lentokoneen_tuulilasissa_melko_yleisia/5300912

[2] Bird Strike Damage & Windshield Bird Strike Final Report. Euroopan lentoturvallisuusvirasto EASA. Noudettu osoitteesta http://easa.europa.eu/rulemaking/docs/research/Final%20report%20Bird%20Strike%20Study.pdf

Ratkaisu

a)

Törmäyksen energiahäviö on suurin, jos törmäys on epäelastinen. Tällöin tuulilasin absorboima energia on suurin. [0,5 p]

Massiivisen lentokoneen nopeus ei mainittavasti muutu törmäyksessä. [1 p päättely tai ao. lasku]

(Varmistukseksi voidaan tarkastella epäelastista törmäystä, jossa lintu ($m_1 = 1{,}8\,\mathbf{kg}, \quad v_1 = 10\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$) törmää kohtisuoraan lentokoneen ($M \gg m_1, v = 840\,\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}} \approx 233{,}33\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$) tuulilasiin ja jää siihen kiinni. Valitaan positiiviseksi suunnaksi lentokoneen etenemissuunta:

$$Mv - m_1 v_1 = (M + m_1)v'$$

$$v' = \frac{Mv - m_1 v_1}{M + m_1} \approx \frac{M}{M}\left(\frac{v - \frac{m_1}{M}v_1}{1 + \frac{m_1}{M}}\right)$$

Koska linnun massa on mitätön lentokoneen massaan verrattuna (useita tonneja), voidaan arvioida $\frac{m_1}{M} \approx 0$. Siispä voidaan todeta, että koneen ja linnun törmäyksen jälkeinen nopeus tosiaan säilyy hetkellisestikin muuttumattomana eli $v' \approx v$.)

Tutkitaan tilannetta koordinaatistossa jossa lentokone on paikoillaan ja lintu lähestyy sitä nopeudella $v + v_1$. [0,5 p]

Ennen törmäystä systeemin kokonaisliike-energia [0,5 p] on $E_{alku} = 0 + \frac{1}{2}m_1(v + v_1)^2$

ja törmäyksen jälkeen, kun lentokone ja lintu jatkavat matkaa yhdessä [0,5p] $E_{loppu} = 0 + 0$

Näiden erotuksesta saadaan törmäyksessä absorboitava energia [1p]

$$E_{alku} - E_{loppu} = \frac{1}{2}m_1(v + v_1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}8\,\mathrm{kg} \cdot (233{,}33 + 10)^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 53\,288{,}54\,\mathrm{J} \approx 53\,\mathrm{kJ}$$.

Osan energiasta absorboi tuulilasi, mutta osan häviöstä selittävät linnun muodonmuutokset.

c)

Lentokone on yhä reippaasti painavampi kuin kanadanhanhi ($m_2 = 3{,}6\ \mathrm{kg}$), joten b-kohdan perustelujen mukaan [0,5p] voidaan jälleen päätellä loppunopeuden olevan alkuperäinen matkanopeus $v = 240\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 66{,}66\ldots\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Tuulilasiin kohdistuu nyt b-kohdan yhtälön mukaan energia

$$E_{alku} - E_{loppu} = \frac{1}{2}m_2(v + v_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6\,\mathrm{kg} \cdot (66{,}67 + 20)^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 13\,521{,}04\,\mathrm{J} \approx 14\,\mathrm{kJ}$$ [1p]

joka on huomattavasti pienempi kuin b-kohdan maksimienergia, ja tuulilasin pitäisi kestää tällainen törmäys [0,5p].

5. Puretun runkopatjan jousta tutkittiin painamalla jousta kokoon vaa'an päällä jolloin saatiin oheiset tulokset:

jousen pituus (cm)	5,2	5,5	6,2	6,5	6,7	7,0
vaa'an lukema (kg)	1,04	0,910	0,626	0,485	0,452	0,237

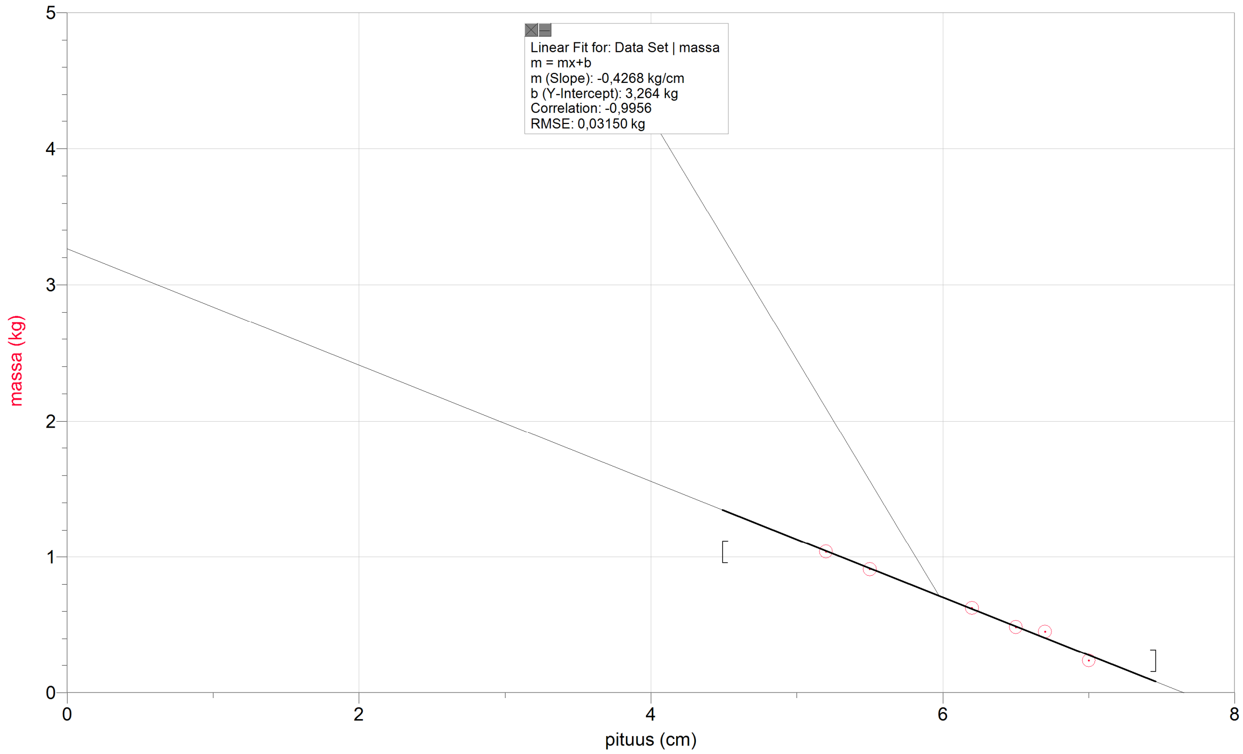
a) Piirrä mittaustuloksista kuvaaja sopivaan koordinaatistoon.

b) Määritä jousen jousivakio.

c) Kuinka pitkä jousi oli kun sitä ei kuormitettu?

Ratkaisu:

a)



Kuvaajaksi käy myös kuvaaja jonka pystyakselina on jousta kuormittava voima. **2p**

b) Jousivakio saadaan kuvaajan fysikaalisen kulmakertoimen vastaluvun avulla:

$$-\frac{\Delta m}{\Delta l} = -(-0,427\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}) = 0,427\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Kerrotaan fysikaalinen kulmakerroin putoamiskiihtyvyydellä g = 9,81 m/s^2, saadaan jousivakio

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta l} \cdot g = 0,427\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 42,7\ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 419 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 420\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$. **2p**

c) Luetaan kuvaajasta kohta jossa massa on nolla. Jousen lepopituus on 7,6 cm**2p**