30. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

2017

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Metsässä on 40 % enemmän havupuita kuin lehtipuita. Hakkuussa havupuut vähenivät 20 % ja lehtipuut 12%. Hakkuun jälkeen metsässä oli havupuiden osuus

a) 46%	b) 56%	c) 58%	d) 14/25

2. Oppilas on joko terve tai sairas. 95 % tänään terveistä oppilaista on terveitä huomennakin, ja 55 % tänään sairaista on sairaita huomennakin. Tänään 20 % oppilaista on sairaana. Kuinka monta prosenttia oppilaista on sairaina huomenna?

a) enintään yhtä monta kuin tänään	b) ainakin yhtä monta kuin tänään
c) $22,5$ % kaikista	d) 15 % kaikista

3. Luku x on yhtälön $x^2 + x - 2 = 0$ ja luku y yhtälön $y^2 - 3y + 2 = 0$ ratkaisu. Mitä tiedetään luvuista x ja y?

a) $x \neq y$.	b) xy on kokonaisluku.
c) $x + y > 0$.	d) $\lvert x + y \rvert \leq 3$.

4. Suora leikkaa ympyrää pisteissä A ja B ($A \neq B$). Ympyrän kehältä valitaan piste C niin, että syntyy alaltaan mahdollisimman suuri tasakylkinen kolmio, jonka kanta on AB. Mitkä seuraavista väittämistä pitävät aina paikkansa?

a) Kolmio ABC on suorakulmainen, jos ja vain jos AB on ympyrän halkaisija.
b) Piste C on jänteen AB keskinormaalilla.
c) Kolmion ABC pinta-ala on vähintään neljännes ympyrän pinta-alasta.
d) Kolmion ABC piiri on pidempi kuin ympyrän halkaisija.

5. Jos $|x| < \frac{1}{2}$, niin $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ on aina

a) välillä $[\frac{1}{2}, 1]$	b) pienempi kuin 1
c) välillä $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	d) ei välttämättä mikään edellisistä.

6. Yhtälön $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ ratkaisujen lukumäärä on

a) 0	b) 1	c) 2	d) enemmän kuin 2.

7. Taideinstallaatiossa on samankeskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat 1 m, 2 m, . . . , 100 m. Sisin ympyrä on väritetty siniseksi. Pienin rengas (eli kahden peräkkäisen ympyrän kaarien väli) on väritetty punaiseksi. Siniset ja punaiset renkaat vuorottelevat. Määritä sinisten renkaiden ala.

8. Kaksi henkilöä, Kari ja Veera, pelaavat seuraavanlaista peliä: Veera on valinnut kolmen alkion joukosta $\{a, b, c\}$ yhden alkion umpimähkäisesti, ja Kari pyrkii selvittämään, mikä se on. Sallittuja kysymyksiä ovat vain ”Onko se a?”, ”Onko se b?” ja ”Onko se c?”. Veera vastaa kysymyksiin ”kyllä” tai ”ei”, mutta hän saa valehdella, kunhan kustakin kolmesta peräkkäisestä vastauksesta korkeintaan yksi on vale. Kari saa toistaa minkä tahansa kysymyksen, mutta ei saa esittää mitään kysymystä kolmesti. Onko Karilla kyselystrategiaa, jonka avulla hän pystyy aina selvittämään Veeran valitseman alkion käytettävissään olevien kuuden kysymyksen aikana.

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

30. 10. 2017

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________

Koulu : ______________________

Kotiosoite : ______________________

Sähköposti : ______________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

30. 10. 2017

1. Jos $|x| < \frac{1}{2}$, niin $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ on aina

a) välillä $[\frac{1}{2}, 1]$	b) pienempi kuin 1
c) välillä $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	d) ei välttämättä mikään edellisistä.

2. Yhtälön $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ ratkaisujen lukumäärä on

a) 0	b) 1	c) 2	d) enemmän kuin 2.

3. Tarkastellaan yhtälöä

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}},$$

missä $a > 0$. Mitä yhtälön ratkaisuista voidaan sanoa?

a) Yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.	b) Ratkaisut ovat epänegatiivisia.
c) $x = a$ on yksi ratkaisu.	d) $x = \frac{3}{4}a$ on yksi ratkaisu.

4. Taideinstallaatiossa on samankeskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat 1 m, 2 m, $\ldots$, 100 m. Sisin ympyrä on väritetty siniseksi. Pienin rengas (eli kahden peräkkäisen ympyrän kaarien väli) on väritetty punaiseksi. Siniset ja punaiset renkaat vuorottelevat. Määritä sinisten renkaiden ala.

5. Oletetaan, että luvut $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ ja $\dfrac{1}{b+c}$ muodostavat aritmeettisen jonon. Osoita, että lukujen a, b ja c neliöt muodostavat myös aritmeettisen jonon.

6. Kaksi toistensa suhteen liikkuvaa janaa leikkaa toisensa siten, että niiden välinen kulma pysyy vakiona. Todista, että sen nelikulmion ala, jonka kärkipisteinä ovat janojen päätepisteet, on vakio.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

30. 10. 2017

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

30. 10. 2017

1. Mikä on luvun $2017^{2017} - 2016^{2016}$ viimeinen numero kymmenjärjestelmäesityksessä?

2. Oppilaat A, B, C, ..., J aikovat osallistua kurssien K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 ja K_6 kokeisiin seuraavasti:

oppilas	kokeet, joihin osallistuu	oppilas	kokeet, joihin osallistuu
A	K_1, K_2	F	K_2, K_3
B	K_1, K_3	G	K_3, K_4
C	K_1, K_4	H	K_4, K_5
D	K_1, K_5	I	K_5, K_6
E	K_1, K_6	J	K_6, K_2

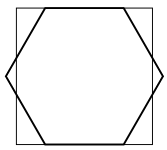
Koulun rehtori pyrkii järjestämään kokeet seuraavasti: Samassa koetilaisuudessa voi olla useampien kurssien kokeita, mutta kustakin kurssista järjestetään vain yksi koe. Yhdessä koetilaisuudessa saa yrittää suorittaa korkeintaan yhtä kurssia.

a) Montako eri tilaisuutta vähintään tarvitaan?

b) Jos joku oppilaista peruuttaa osallistumisensa, muuttuuko tarve tilaisuuksien vähimmäismäärästä mitenkään?

3. Oletetaan, että luvut $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ ja $\dfrac{1}{b+c}$ muodostavat aritmeettisen jonon. Osoita, että lukujen a, b ja c neliöt muodostavat myös aritmeettisen jonon.

4. Säännöllisellä kuusikulmiolla ja neliöllä on sama keskipiste. Kuusikulmion sivuista kaksi sisältyy neliön sivuihin, ja neliön ala on 1 (ks. kuviota). Laske neliön ja kuusikulmion yhteisen osan ala.



Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

30. 10. 2017

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0-4 rätta svar.

1. I en skog finns det 40 % mera barrträd än lövträd. Vid en skogsavverkning minskade antalet barrträd med 20 % och antalet lövträd med 12%. Efter skogsavverkningen var barrträdens andel av skogen

a) 46%	b) 56%	c) 58%	d) 14/25

2. En elev är antingen frisk eller sjuk. 95 % av de elever som är friska idag är frisk också i morgon och 55 % av de elever som är sjuka idag är sjuka också i morgon. I dag är 20 % av eleverna sjuka. Hur många procent av eleverna är sjuka i morgon?

a) högst lika många som idag	b) åtminstone lika många som idag
c) $22,5$ % av alla	d) 15 % av alla

3. Talet x är lösning till ekvationen $x^2+x-2=0$ och talet y är lösning till ekvationen $y^2-3y+2=0$. Vad vet vi om talen x och y?

a) $x \neq y$.	b) xy är ett heltal.
c) $x+y>0$.	d) $\lvert x+y\rvert \leq 3$.

4. En linje skär en cirkel i punkterna A och B ($A \neq B$). På cirkelns rand väljer vi en punkt C så att det uppstår en till arean maximal likbent triangel vars bas är AB. Vilka av följande påståenden är alltid sanna?

a) Triangeln ABC är rätvinklig om och endast om AB är diameter i cirkeln.
b) Punkten C ligger på mittpunktsnormalen till kordan AB.
c) Arean av triangeln ABC är minst en fjärdedel av cirkelns area.
d) Triangelns ABC omkrets är längre än cirkelns diameter.

5. När $|x| < \frac{1}{2}$ är $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ alltid

a) inom intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$
b) mindre än 1
c) inom intervallet $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
d) inte nödvändigtvis något av de föregående.

6. Antalet lösningar till ekvationen $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ är

a) 0 b) 1 c) 2 d) fler än 2.

7. I en konstinstallation finns cirklar med samma medelpunkt och cirklarna har radierna $1\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m}, \ldots, 100\ \mathrm{m}$. Den innersta cirkeln är färgad blå. Den minsta ringen (d.v.s. området mellan två på varandra följande cirkelbågar) är färgad röd. De blåa och de röda cirklarna alternerar. Bestäm arean av de blåa ringarna.

8. Två personer, Kari och Vera, spelar följande spel: Vera har slumpmässigt valt ut ett element ur en mängd med tre element $\{a, b, c\}$ och Kari försöker bestämma vilket element hon valt ut. Endast följande frågor är tillåtna: ”Är det a?”, ”Är det b?” och ”Är det c?”. Vera besvarar frågorna med ”ja” eller ”nej” men hon får ljuga förutsatt att högst ett av tre på varandra följande svar är en lögn. Kari får upprepa vilken fråga som helst men får inte ställa en och samma fråga tre gånger. Har Kari en frågestrategi med vars hjälp han alltid kan bestämma det element Vera valt ut när han får ställa sex frågor?

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

30. 10. 2017

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

30. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

2017

1. När $|x| < \frac{1}{2}$ är $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ alltid

a) inom intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$
b) mindre än 1
c) inom intervallet $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
d) inte nödvändigtvis något av de föregående.

2. Antalet lösningar till ekvationen $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ är

a) 0 b) 1 c) 2 d) fler än 2.

3. Vi studerar ekvationen

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}},$$

där $a > 0$. Vad kan vi säga om lösningarna till ekvationen?

a) Ekvationen har endast en lösning. b) Lösningarna är icke-negativa.
c) $x = a$ är en lösning. d) $x = \frac{3}{4}a$ är en lösning.

4. I en konstinstallation finns cirklar med samma medelpunkt och cirklarna har radierna $1\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m}, \ldots, 100\ \mathrm{m}$. Den innersta cirkeln är färgad blå. Den minsta ringen (d.v.s. området mellan två på varandra följande cirkelbågar) är färgad röd. De blåa och de röda cirklarna alternerar. Bestäm arean av de blåa ringarna.

5. Vi antar att talen $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ och $\dfrac{1}{b+c}$ bildar en aritmetisk talföljd. Visa att även kvadraterna på talen a, b och c bildar en aritmetisk talföljd.

6. Två sträckor som rör sig i förhållande till varandra skär varandra så att vinkeln mellan sträckorna hålls konstant. Bevisa att arean av den fyrhörning, vars hörn utgörs av sträckornas ändpunkter, är konstant.

30. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2017

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ____

Skola : ____

Hemadress : ____

E-postadress : ____

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

30. 10.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens öppna serie

2017

1. Vilken är den sista siffran i tiopotensframställningen av talet $2017^{2017} - 2016^{2016}$?

2. Eleverna A, B, C, ..., J tänker delta i prov i kurserna K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 och K_6 enligt följande:

elev	deltar i proven	elev	deltar i proven
A	K_1, K_2	F	K_2, K_3
B	K_1, K_3	G	K_3, K_4
C	K_1, K_4	H	K_4, K_5
D	K_1, K_5	I	K_5, K_6
E	K_1, K_6	J	K_6, K_2

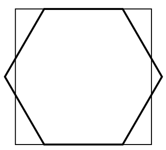
Skolans rektor tänker anordna proven på följande sätt: Vid samma provtillfälle kan det finnas prov i flera olika kurser men det ordnas endast ett prov i varje kurs. Vid ett provtillfälle får man försöka klara högst en kurs.

a) Hur många olika tillfällen behöver man minst anordna?

b) Om någon elev inhiberar sitt deltagande, ändrar då minimibehovet av antalet tillfällen som behövs på något sätt?

3. Vi antar att talen $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ och $\frac{1}{b+c}$ bildar en aritmetisk talföljd. Visa att även kvadraterna på talen a, b och c bildar en aritmetisk talföljd.

4. En regelbunden sexhörning och en kvadrat har samma medelpunkt. Två av sexhörningens sidor ligger på kvadratens sidor och kvadratens area är 1 (se figuren). Beräkna arean av det gemensamma området för sexhörningen och kvadraten.



Tävlingstiden är **120 minuter.**

Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.

Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.

Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

High School Mathematics Competition
First Round, Basic Level

30. 10. 2017

The problems are on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. There are 40 % more conifers than broad-leaved trees in a forest. Logging reduces the number of conifers by 20 % and the number of broad-leaved trees by 12%. After logging, the proportion of conifers in the forest is

a) 46% b) 56% c) 58% d) 14/25

2. A student is either sick or healthy. 95 % of the students who are healthy today, will also be healthy tomorrow. 55 % of those students who are sick today, will also be sick tomorrow. 20 % of the student population are sick today. How many percent of the student population will be sick tomorrow?

a) at most as many as today b) at least as many as today
c) $22,5$ % of all d) 15 % of all

3. The number x is a solution to the equation $x^2 + x - 2 = 0$ and the number y is a solution to the equation $y^2 - 3y + 2 = 0$. What do we know about numbers x and y?

a) $x \neq y$. b) xy is an integer
c) $x + y > 0$. d) $|x + y| \leq 3$.

4. A line intersects a circle in points A and B ($A \neq B$). We choose point C on the perimeter of the circle in such a way that we form an isosceles triangle that has area which is as large as possible and which has AB as its base. Which ones of the following claims are always true?

a) The triangle ABC has a right angle if and only if AB is a diameter of the circle.
b) The point C lies on the perpendicular bisector of AB.
c) The area of the triangle ABC is at least a fourth part of the area of the circle.
d) The perimeter of the triangle ABC is longer than the diameter of the circle.

5. If $|x| < \frac{1}{2}$ then $\left|\frac{x}{x-1}\right|$ is always

a) on the interval $[\frac{1}{2}, 1]$
b) smaller than 1
c) on the interval $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
d) not necessarily any of the options given

6. The number of solutions to the equation $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ is

a) 0 b) 1 c) 2 d) more than 2.

7. An art installation consists of circles with a common center and with radii 1 m, 2 m, ..., 100 m. The innermost circle is colored blue. The smallest annulus (the area between two consecutive circles) is colored red. Every other annuli is red, and every other blue. Determine the area of the blue annuli.

8. Two persons, Kari and Veera, play the following game: Veera has chosen an arbitrary element from the set $\{a, b, c\}$ consisting of three elements. Kari tries to find out which one it is. The questions allowed are only "Is it a?", "Is it b?" and "Is it c?". Veera answers questions "yes" or "no" but she is allowed to lie as long as out of three consecutive questions, at most one is a lie. Kari can repeat any question, but he is not allowed to ask any question thrice. Does Kari have a strategy so that he can find out which element Veera has chosen not using more than those six questions he is allowed?

30. 10. 2017

Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **The use of calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

High School Mathematics Competition
First Round, Intermediate Level

30. 10. 2017

1. If $|x| < \frac{1}{2}$ then $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ is always

a) on the interval $[\frac{1}{2}, 1]$
b) smaller than 1
c) on the interval $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
d) not necessarily any of the options given

2. The number of solutions to the equation $3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4$ is

a) 0 b) 1 c) 2 d) more than 2.

3. Consider the equation

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}},$$

with $a > 0$. What can we say about the solutions to the equation?

a) The equation has only one solution.
b) The solutions are non-negative.
c) $x = a$ is one solution.
d) $x = \frac{3}{4}a$ is one solution.

4. An art installation consists of circles with a common center and with radii 1 m, 2 m, ..., 100 m. The innermost circle is colored blue. The smallest annulus (the area between two consecutive circles) is colored red. Every other annuli is red, and every other blue. Determine the area of the blue annuli.

5. Let us assume that the numbers $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}$ form an arithmetic progression. Prove that the squares of the numbers a, b and c also form an arithmetic progression.

6. Two intersecting segments move on a plane in such a way that the angle between them stays the same. Prove that the area of the quadrilateral determined by the end-points of the segments, is a constant.

30. 10. **Intermediate Level Multiple Choice Answer Sheet** 2017

The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ____

School : ____

Home address : ____

Email : ____

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

30. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Open Level

2017

1. What is the last digit in the decimal representation of the number $2017^{2017} - 2016^{2016}$?

2. The students A, B, C, …, J are planning to take final exams of the courses K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 and K_6 according to the following list:

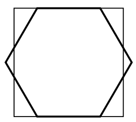
student	courses	student	courses
A	K_1, K_2	F	K_2, K_3
B	K_1, K_3	G	K_3, K_4
C	K_1, K_4	H	K_4, K_5
D	K_1, K_5	I	K_5, K_6
E	K_1, K_6	J	K_6, K_2

The school principal tries to organize the exam according to following regulations: It is possible to organize the exams of different courses at the same occasion but only one exam per course will be organized. At any given occasion, a student is allowed to take at most one exam.

a) How many different occasions will be needed?
b) If some student cancels his/her participation in some exam, does the minimal number of different exam occasions still stay the same?

3. Let us assume that the numbers $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ $\frac{1}{b+c}$ form an arithmetic progression. Prove that the squares of the numbers a, b and c also form an arithmetic progression.

4. A regular hexagon and a square have a common center. Two of the sides of the hexagon are included in the sides of the squares, and the area of the square is 1 (see the figure). Calculate the area of the part that the hexagon and the square share together.



Time allowed: **120 minutes.**
Only writing and drawing equipments are allowed.
No calculators or tables!
Write your solutions of different problems on different sheets.
Mark every sheet with your name and provide
contact information (school, your own address and email).

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

30. 10. 2017

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$+$
2.	$+$	$-$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$+$	$+$	$-$	$+$
5.	$-$	$+$	$-$	$-$
6.	$-$	$-$	$+$	$-$

P1. Lehtipuiden lukumäärä olkoon aluksi n, jolloin havupuiden määrä on $1{,}4n$. Hakkuiden jälkeen lehtipuiden määrä putoaa lukuun $n - 0{,}12n = 0{,}88n$ ja havupuiden lukuun $(1 - 0{,}2) \cdot 1{,}4n = 0{,}8 \cdot 1{,}4n = 1{,}12n$, joten havupuiden osuus on hakkuiden jälkeen on

$$\frac{1{,}12n}{0{,}88n + 1{,}12n} = \frac{1{,}12}{2} = 0{,}56 = 56\,\% = \frac{14}{25}.$$

Siis kohdat b ja d ovat oikein, a ja c sen sijaan väärin.

P2. Olkoon oppilaiden lukumäärä $100n$. Tänään sairaita on $20n$ ja terveitä $80n$. Terveistä on huomenna sairaita 5% eli

$$\frac{5}{100} \cdot 80n = 4n.$$

Sairaista on huomennakin sairaita

$$\frac{55}{100} \cdot 20n = 11n.$$

Huomenna sairaita on siis $4n + 11n = 15n$ eli 15 % kaikista. Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein, b ja c sen sijaan väärin.

P3. Ratkaistaan ensin yhtälöt:

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0 \iff x = 1 \lor x = -2$$

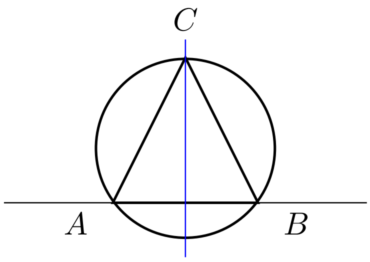
ja

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \iff (y-1)(y-2) = 0 \iff y = 1 \lor y = 2.$$

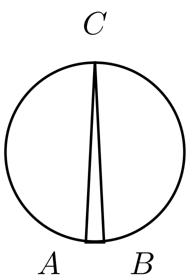
On siis mahdollista, että $x = y = 1$ (kohta a väärin), ja selvästi xy on kokonaisluku (b oikein). $x + y$ ei välttämättä ole positiivinen, sillä $-2 + 1 = -1 < 0$ (c väärin.) Eri mahdollisuudet summalle $x + y$ ovat 2, 3, -1 tai 0. joten kohta d on oikein.

P4. Kohta a seuraa suoraan klassisesta Thaleen lauseesta ja sen käänteislauseesta. Sen voi päätellä myös kehäkulmalauseesta: Koska ABC on tasakylkinen, ainoastaan sen huippukulma ACB voi olla suora. Tehtävän ympyrä on kolmion ABC ympärysympyrä, joten kehäkulmalauseen mukaan $\sphericalangle ACB = 90°$, jos ja vain jos jännettä AB vastaava keskuskulma on oikokulma. Tällöin AB on tietenkin ympyrän halkaisija.

Tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana on tietenkin osa jänteen AB keskinormaalista, joten kohta b on myös oikein.



Kohta c ei pidä paikkaansa, sillä kolmion ABC korkeus on aina korkeintaan ympyrän halkaisija, kun taas kanta AB voi olla mielivaltaisen lyhyt.



Kohta d pitää paikkansa sen tähden, että kolmion ABC korkeus on aina vähintään ympyrän säteen pituus, jolloin kylkien pituuksien summa on jo vähintään ympyrän halkaisija.

P5. Tehtävän oletuksesta saadaan

$$\begin{aligned}|x| < \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\\ &\iff -\frac{3}{2} < x-1 < -\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \quad |x-1| > \frac{1}{2},\end{aligned}$$

joten

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{\overbrace{|x|}^{<1/2}}{\underbrace{|x-1|}_{>1/2}} < \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Siis kohta b on oikein. Kohdat a ja c eivät päde, sillä $x = 0$ toteuttaa oletuksen, mutta $|0/(0-1)| = 0$ ei ole välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ eikä ei ole välillä $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Kohta d on tietenkin väärin, koska kohta b on oikein.

P6. Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned}3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4 &\iff 3^x(3 \cdot 3^x + 3^{-x}) = 3^x \cdot 4 \qquad \mid \quad 3^x \neq 0\\ &\iff 3 \cdot 3^{2x} + 1 = 3^x \cdot 4\\ &\iff 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0\\ &\iff 3^x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6}\\ &\iff 3^x = 1 \vee 3^x = \frac{1}{3}.\\ &\iff x = 0 \vee x = -1.\end{aligned}$$

Siis ratkaisuja on täsmälleen kaksi, joten kohta c on ainoa oikea.

Huomautus: Yhtälöä ei ole tarpeen ratkaista loppuun asti, jotta tietäisi, että ratkaisuja on täsmälleen kaksi. Sijoittamalla $t = 3^x$ saadaan nimittäin toisen asteen yhtälö $3t^2 - 4t + 1 = 0$, jolla on kaksi ratkaisua, sillä diskriminantti $(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$ on positiivinen. Lisäksi nämä ratkaisut ovat positiivisia, koska vakiotermi on positiivinen ja ensimmäisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten saatuja t:n arvoja vastaavat x:n arvot.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Yhden sinisen renkaan ala on $(2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k + 1$, missä k on parillinen kokonaisluku ja $k < 100$. Kokonaisala on siis

$$\begin{aligned}&\pi\left(1^2 - 0^2 + 3^2 - 2^2 + 5^2 - 4^2 + \cdots + 99^2 - 98^2\right)\\ =&\pi(1 + 5 + 9 + \cdots + 4 \cdot 49 + 1)\\ =&50\pi + 4\pi\frac{49 \cdot 50}{2} = 50\pi + 2\pi 49 \cdot 50 = 4950\pi.\end{aligned}$$

P8. Merkitään kysymys-vastaus-sarjoja seuraavasti: Jos kysymykseen "Onko se s" saadaan myönteinen vastaus, merkitään yksinkertaisesti s, jos kielteinen, niin sen sijaan $\bar{s}$. Esimerkiksi $a\bar{c}b$ tarkoittaa siis, että kysymykseen "Onko se a" on saatu myönteinen vastaus, kysymykseen "Onko se c" sen sijaan kielteinen, ja kysymykseen "Onko se b" jälleen myönteinen vastaus. Jos w on tällainen kysymys-vastaus-sarja ja siitä voidaan päätellä, että Veeran valitsema alkio oli s, merkitään $w \to s$.

Väite: Oletetaan, että Kari kysyy kolmella ensimmäisellä kysymyksellään ensin, onko valittu alkio a, sitten onko se b ja lopuksi uudelleen, onko se a. Jos Veera vastaa ainakin kahdesti myönteisesti, niin Kari voi päätellä valitun alkion.

Todistus: Huomataan ensin, että

$$aba \to a,\ a\bar{b}a \to a.$$

Koska nimittäin kolmesta peräkkäisestä Veeran vastauksesta korkeintaan yksi on vale, niin Veeran on täytynyt puhua totta vastatessaan kahdesti myönteisesti kysymykseen "Onko se a?". Jäljelle jäävissä tapauksissa saadaan

$$ab\bar{a} \to b,\ \bar{a}ba \to b.$$

Veera on nimittäin valehdellut jo kerran vastatessaan kysymyksiin a:sta, joten myönteinen vastaus b:stä on rehellinen. □

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $a\bar{b}\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}a$. Tällöin Kari pystyy selvittämään Veeran valitseman alkion korkeintaan kahdella jatkokysymyksellä.

Todistus: Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran kysymyksiin a:sta, joten epäävä vastaus b:stä on rehellinen. Siis valittu alkio on a tai c, joten Kari jatkaa kysymällä "Onko se c?" ja toistaa kysymyksen, jos se on tarpeen. Jos Veera vastaa näihin kysymyksiin kahdesti samalla tavalla, niin Kari tietää vastauksen perusteella valitun alkion. Muuten Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran, joten kolmas vastaus on rehellinen ja Kari päättelee valitun alkion sen perusteella. Tarkemmin saadaan

$$a\bar{b}\bar{a}c, a\bar{b}\bar{a}\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}a\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}acc \to c,$$
$$a\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{c}, \bar{a}\bar{b}ac\bar{c} \to a. \quad \square$$

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $\bar{a}b\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}\bar{a}$. Tällöin Kari pystyy selvittämään valitun alkion kaikkiaan kuudella kysymyksellä.

Todistus: Kolmen ensimmäisen vastauksen perusteella Kari tietää, että valittu alkio on b tai c. Hän kysyy ensin uudestaan, onko alkion b, ja varautuu kysymään sen jälkeen kahdesti, onko alkio c. Jos Veeran vastaus toiseen kysymykseen oli myönteinen, niin voidaan päätellä

$$\bar{a}b\bar{a}b \to b,\ \bar{a}b\bar{a}\bar{b}c \to c,$$
$$\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}c \to c,\ \bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{c} \to b.$$

Jos toinen vastaus sen sijaan oli kielteinen, niin

$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}bcc \to c$$
$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}bc\bar{c}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}b\bar{c} \to b. \quad \square$$

Näistä aputuloksista seuraa ratkaisu.

Vastaus: *Kari pystyy kuudella kysymyksellä selvittämään Veeran valitsemaan alkion.*

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$-$
2.	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$

V1=P5.
V2=P6.
V3. Ratkaistaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
& x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} \\
\implies\ & \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} = a - x \quad \implies \quad a^2 - x\sqrt{x^2+a^2} = a^2 - 2ax + x^2 \\
\implies\ & 0 = x^2 - 2ax + x\sqrt{x^2+a^2} \\
\implies\ & 0 = x(x - 2a + \sqrt{x^2+a^2}) \\
\implies\ & x = 0 \lor \sqrt{x^2+a^2} = 2a - x \\
\implies\ & x = 0 \lor x^2 + a^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \quad \implies \quad x = 0 \lor a^2 = 4a^2 - 4ax \\
\implies\ & x = 0 \lor 4ax = 3a^2 \\
\implies\ & x = 0 \lor x = \frac{3}{4}a
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla havaitaan, että nämä todella ovat ratkaisuja:

$$a - \sqrt{a^2 - 0\sqrt{0^2+a^2}} = a - a = 0$$

ja

$$
\begin{aligned}
& a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + a^2}} = a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt{\frac{25}{16}a^2}} \\
& = a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a \cdot \frac{5}{4}a} = a - \sqrt{a^2 - \frac{15}{16}a^2} = a - \sqrt{\frac{1}{16}a^2} \\
& = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a,
\end{aligned}
$$

sillä $a > 0$. Siis kohta d on oikein ja c väärin. Koska ratkaisuja on kaksi ja molemmat ovat epänegatiivisia, niin kohta a on väärin ja kohta b oikein.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P7.

V5. Kolme lukua muodostaa aritmeettisen jonon, jos ja vain jos yksi niistä on kahden muun keskiarvo. Voidaan olettaa, että jono on valmiiksi oikeassa järjestyksessä ja siis

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

Kertomalla tämä puolittain nimittäjien tulolla saadaan

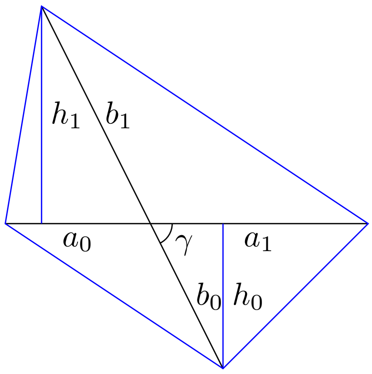
$$2(a+b)(b+c) = (a+c)(b+c) + (a+c)(a+b)$$

eli

$$2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc = ab + ac + bc + c^2 + a^2 + ac + bc + ab.$$

Sievennyksen jälkeen jää vain $2b^2 = a^2 + c^2$. Siis b^2 on a^2:n ja c^2:n keskiarvo. [Tehtävä oli ylioppilastutkinnossa vuonna 1931.]

V6. Olkoot liikkuvien janojen pituudet a ja b sekä niiden välinen vakiokulma γ.



Janat jakautukoot leikatessaan osiin niin, että $a = a_0 + a_1$ ja $b = b_0 + b_1$ (ks. kuvaa). Lasketaan kärkipisteiden määräämän nelikulmion ala sen avulla, että jana, jonka pituus on a, jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi. Olkoot h_0 ja h_1 kantaa a vastaan kohtisuorassa olevat korkeusjanat. Tällöin ala on

$$\frac{ah_0}{2} + \frac{ah_1}{2} = \frac{a(h_0 + h_1)}{2} = \frac{a(b_0 \sin\gamma + b_1 \sin\gamma)}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2},$$

ts. riippumaton siitä, missä pisteessä janat leikkaavat. $\square$

Avoin sarja

A1.

$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7^{2017} - 6^{2016} \equiv 7^{2017} - 6 \pmod{10}.$$

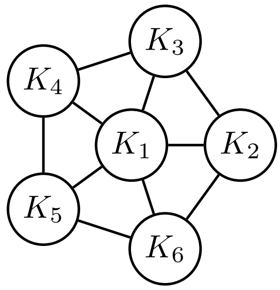
Luvun 7 potenssien jäännökset kymmenellä jaettaessa ovat 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7,.... Koska $2017 \equiv 1 \bmod 4$, on jakojäännös 7, joten

$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7 - 6 = 1 \pmod{10}.$$

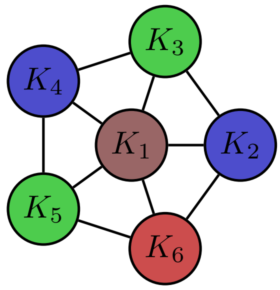
Vastaus: *Viimeinen numero on yksi.*

A2.

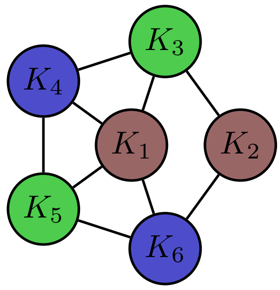
a) Piirretään tilanteesta verkko niin, että kurssit ovat solmuja ja kahden solmun välille piirretään särmä täsmälleen silloin, kun joku haluaa osallistua molempiin kokeista.



Jos kurssien välillä on särmä, niin niiden kokeet pitää järjestää eri koetilaisuudessa; verkkoteoreettisesti sanotaan, että ne pitää *värittää* eri väreillä. Solmulle K_1 tulee selvästi oma värinsä, ja koska muut solmut muodostavat parittoman syklin, niiden värittämiseen tarvitaan kolme väriä. Yksi mahdollinen väritys neljällä värillä on seuraava.

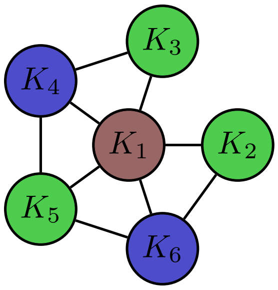


b) Peruuttava oppilas on joko joku oppilaista A–E tai joku oppilaista F–J. Symmetriasyistä riittää tarkastella niitä tapauksia, joissa A tai F peruuttaa. Jos A peruuttaa, kolme koetilaisuutta riittää.



Vähemmälläkään ei selvitä, koska jo 5-syklin värittämiseen tarvitaan kolme väriä.

Jos F peruuttaa, niin jälleen selvitään kolmella värillä.

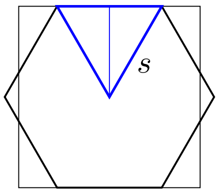


Tässä tapauksessa solmu K_1 vaatii oman värinsä, ja muiden värittäminen yhdellä värillä ei tietenkään onnistu.

Vastaus: *a) Tarvitaan neljä koetilaisuutta. b) Kolme koetilaisuutta riittää (ja tarvitaan) peruutuksen jälkeen.*

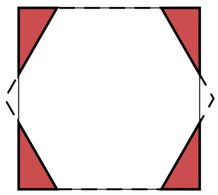
A3=V5.

A4. Olkoon säännöllisen kuusikulmion sivun pituus s. Säännöllinen kuusikulmio jakautuu kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden korkeudet ovat puolet neliön sivusta eli $\frac{1}{2}$.



Siis $\dfrac{\sqrt{3}}{2}s = \dfrac{1}{2}$, mistä $s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Säännöllisten monikulmioiden leikkauksen ala saadaan poistamalla neliöstä neliön kärkiin jäävät suorakulmaista kolmiot.



Tällaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus saadaan luonnollisesti siitä, että kaksi tällaista kateettia ja kuusikulmion sivu yhdessä muodostavat neliön sivun. Siis tämän kateetin pituus on $(1 - s)/2$. Lisäksi poistettavan suorakulmaisen kolmion kulmat voidaan päätellä siitä, että säännöllisen viisikulmion kulmien yhteinen suuruus on $(6-2) \cdot 180°/6 = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$. Siis lyhyemmän kateetin ja hypotenuusan välinen kulma on

$180° - 120° = 60\circ$. Siten pidemmän kateetin pituus on $\sqrt{3}(1-s)/2$ ja poistettava ala

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(1-s)}{2} \cdot \frac{1-s}{2} &= \frac{\sqrt{3}(1-1/\sqrt{3})^2}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1. \end{aligned}$$

Leikkauksen alaksi saadaan siis

$$1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vastaus: *Yhteisen osan ala on* $2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.