Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

31. 10. 2018

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Lukion A ja lukion B oppilasmäärien suhde oli a/b vuoden 2017 lopussa. Vuoden 2017 aikana lukion A oppilasmäärä oli kasvanut 5 % ja lukion B 10 %. Vuoden 2017 alussa oppilasmäärien suhde oli ollut

a) $\dfrac{95a}{90b}$ b) $\dfrac{105a}{110b}$ c) $\dfrac{22a}{21b}$ d) $\dfrac{19a}{18b}$

2. Mitä voidaan sanoa lausekkeen $k^{3x} - k^x$ tarkasta arvosta, kun $k^{2x} = 16$ ja $k > 0$.

a) Tehtävää ei voi ratkaista, sillä vastaus riippuu lukujen x ja k arvoista.
b) Lausekkeen arvo on 56.
c) Lausekkeen arvo on 60.
d) Vastaus on irrationaaliluku.

3. Neliö kääntyy 45° keskipisteensä ympäri, jolloin syntyy tähden muotoinen 16-kulmio. 16-kulmion piirin suhde neliön piiriin on

a) alle 1,5 b) $4 - 2\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

4. Tarkastellaan yhtälöä

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a,$$

missä tuntematon x on eri kuin 1 ja $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Mitä voidaan sanoa yhtälön ratkaisuista?

a) Sopivalla parametrin a arvolla yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.
b) Yhtälö ei ratkea kaikilla parametrin a arvoilla.
c) Yhtälöllä on aina ratkaisuja riippumatta vakion a arvosta.
d) Yhtälöllä on aina kolme ratkaisua.

5. Kymmenen (eri) suoraa jakaa tason alueisiin, joita voi olla vaihteleva määrä sen mukaan, miten suorat on piirretty. Mitkä seuraavista ovat mahdollisia syntyneiden alueiden lukumääriä?

a) 20 b) 9 c) 56 d) 32

6. Matemaattisesti häiriintynyt sammakko hyppelee tasossa vain loikkia, joiden pituus on täsmälleen $\sqrt{5}$. Sammakko potee lukuteoreettista oireyhtymää, jonka takia sen loikat päättyvät vain pisteisiin, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. Sammakko lähtee liikkeelle origosta ja palaa neljän loikan jälkeen takaisin origoon. Kuinka monella tavalla sammakko voi tehdä tällaisen neljän loikan sarjan? Mitä voidaan sanoa ratkaisujen lukumäärästä?

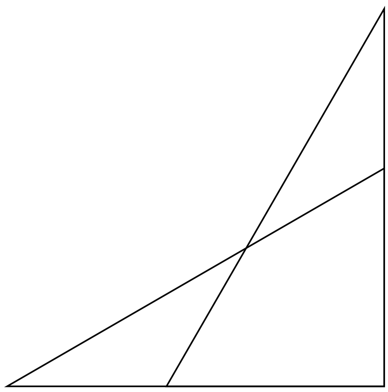
a) Sammakko voi suorittaa neljän loikan sarjan yli sadalla tavalla.
b) Ratkaisujen määrä on kahdeksalla jaollinen.
c) Ratkaisujen määrä on viidellä jaollinen.
d) Sammakko voi suorittaa neljän loikan sarjan korkeintaan 80 tavalla.

7. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^2 - y^2 = 2018$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

8. Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota, joiden molempien lyhyempien kateettien pituus on 1 ja suurempi terävistä kulmista on 60 astetta. Määritä yhteinen pinta-ala.



Perussarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2018

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

31. 10. 2018

Tehtäviä on kahdella sivulla; kolme ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Aritmeettisessa lukujonossa on parillinen määrä jäseniä. Jonon ensimmäinen jäsen on 1. Järjestysluvultaan parillisten jäsenten summa on 210 ja järjestysluvultaan parittomien jäsenten summa on 190. Tällöin:

a) Jonossa on yhteensä 20 jäsentä.
b) Kahden peräkkäisen jäsenen erotus on 4.
c) Viimeinen jäsen on 38.
d) Viimeinen jäsen on 39.

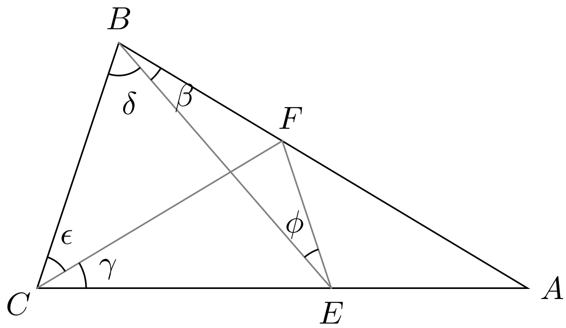
2. Neliö kääntyy $45°$ keskipisteensä ympäri, jolloin syntyy tähden muotoinen 16-kulmio. 16-kulmion piirin suhde neliön piiriin on

a) alle 1,5. b) $4 - 2\sqrt{2}$. c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$. d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.

3. Luvut x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, ja luku x^2+4y^2+1 on alkuluku, joka on luvun $8xy+2$ tekijä. Mitkä seuraavista väitteistä välttämättä pitävät paikkaansa?

a) Luku x on parillinen.
b) Luku $8xy+2$ on viidellä jaollinen.
c) Osamäärä $\dfrac{8xy+2}{x^2+4y^2+1}$ on pienempi kuin neljä.
d) Luku y on parillinen.

4. Oheiseen kuvaan, joka ei ole mittatarkka, on piirretty kolmio ABC ja muutamia janoja. Lisäksi kuvaan merkityistä kulmista tiedetään, että $\beta = 20°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 60°$ ja $\epsilon = 50°$. Määritä kuvaan merkitty kulma ϕ.



5. Etsi kaikki kokonaislukujen x ja y parit, joille pätee

$$x^2 + xy + 2x + y = 100.$$

6. Sanotaan 5×5-ruudukolla olevan *viisi rastia peräkkäin*, jos ne täyttävät kokonaisen rivin, sarakkeen tai jommankumman halkaisijoista. Määritä pienin määrä rasteja, joilla voi täyttää ruudukolle sellaisen asetelman, että vaikka rasteista pyyhkisi minkä tahansa pois, niin ruudukolla on edelleen viisi rastia peräkkäin.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2018

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

31. 10. 2018

1. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^2 - y^2 = 2018$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

2. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja d pisteen B etäisyys sivusta AC. Todista, että $|AB| = |AC|$, jos ja vain jos kaikille sivun BC pisteille D pätee, että $d = d_0 + d_1$, missä d_0 on pisteen D etäisyys sivusta AB ja d_1 sivusta AC.

3. Pyöreän pöydän ääressä istuu n ritaria. Jokaisella heistä on edessään lamppu ja katkaisinnappi. Kun ritari painaa nappia, ei ainoastaan hänen edessään olevan lampun, vaan myös kahden viereisen lampun tila muuttuu, ts. sammuksissa oleva lamppu syttyy ja palava sammuu. Aluksi osa lampuista palaa ja osa on sammuksissa. Etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut $n > 3$, että ritarit voivat jollakin katkaisinnappien painalluskombinaatiolla saada kaikki lamput sammuksiin riippumatta alkutilasta.

4. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle $f(150) = 25$ ja

$$f(x) + f(2f(x)) = 100$$

kaikilla reaaliluvuilla x. Etsi kaikki luvun $f(100)$ mahdolliset arvot.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens grundserie

31. 10. 2018

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. I slutet av år 2017 var förhållandet mellan elevantalet i gymnasiet A och gymnasiet B lika med a/b . Under år 2017 hade elevantalet i gymnasiet A ökat med 5 % medan det i B ökat med 10 %. I början av år 2017 hade förhållandet mellan elevantalet i gymnasium A och B varit

a) $\dfrac{95a}{90b}$ b) $\dfrac{105a}{110b}$ c) $\dfrac{22a}{21b}$ d) $\dfrac{19a}{18b}$

2. Vad kan man säga om det exakta värdet av uttrycket $k^{3x} - k^x$ när $k^{2x} = 16$ och $k > 0$?

a) Uppgiften kan inte lösas för svaret beror av värdet på talen x och k.
b) Uttryckets värde är 56.
c) Uttryckets värde är 60.
d) Svaret är ett irrationellt tal.

3. En kvadrat roterar 45° runt dess medelpunkt och då bildas en stjärnformig 16-hörning. Förhållandet mellan 16-hörningens och kvadratens omkretsar är

a) mindre än 1,5   b) $4 - 2\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

4. Vi studerar ekvationen

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a,$$

där den obekanta x inte är 1 och $a \in \mathbb{R}$ är en konstant. Vad kan man säga om lösningarna till ekvationen?

a) För lämpliga värden på parametern a kan ekvationen ha oändligt många lösningar.
b) Ekvationen går inte att lösa för alla värden på parametern a.
c) Ekvationen har alltid lösningar oberoende av värdet på parametern a.
d) Ekvationen har alltid tre lösningar.

5. Tio (olika) linjer delar in ett plan i ett antal områden och antalet kan variera beroende på hur linjerna är ritade. Vilka av följande kan vara möjliga antal av dessa områden?

a) 20   b) 9   c) 56   d) 32

6. En matematiskt störd groda gör i ett plan endast hopp med längden $\sqrt{5}$. Grodan lider av ett talteoretiskt syndrom som gör att hoppen endast kan sluta i punkter vars koordinater är heltal. Grodan startar från origo och återvänder till origo efter fyra hopp. På hur många sätt kan grodan göra en dylik serie på fyra hopp? Vad kan vi säga om antalet lösningar?

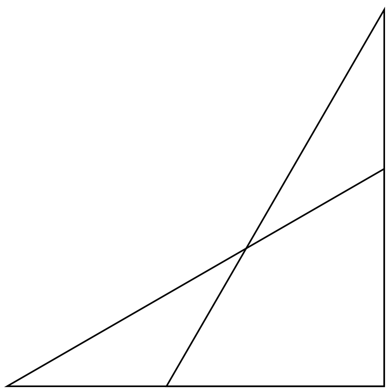
a) Grodan kan göra en serie med fyra hopp på över hundra sätt.
b) Antalet lösningar är delbart med åtta.
c) Antalet lösningar är delbart med fem.
d) Grodan kan göra en serie med fyra hopp på högst 80 sätt.

7. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^2 - y^2 = 2018$$

dvs ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den nämnda ekvationen.

8. På bilden finns två rätvinkliga trianglar. I båda trianglarna är den kortare katetens längd 1 och den större av de spetsiga vinklarna 60 grader. Bestäm den gemensamma arean.



Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

31. 10. 2018

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

31. 10. 2018

Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. I en aritmetisk talföljd finns ett jämnt antal element. Det första elementet är 1. Summan av de till ordningstalet jämna elementen är 210 och summan av de till ordningstalet udda elementen är 190. Då

a) finns det totalt 20 element i talföljden.
b) är differensen mellan två på varandra följande element 4.
c) är det sista elementet 38.
d) är det sista elementet 39.

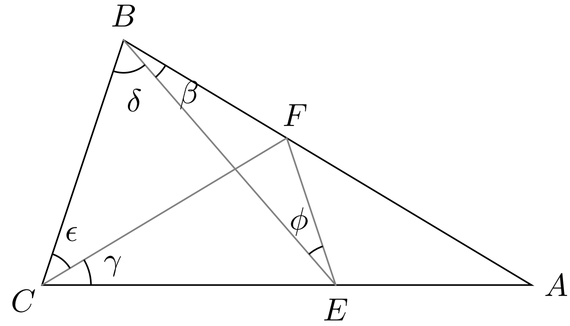
2. En kvadrat roterar 45° runt dess medelpunkt och då bildas en stjärnformig 16-hörning. Förhållandet mellan 16-hörningens och kvadratens omkretsar är

a) mindre än 1,5 b) $4 - 2\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

3. Talen x och y är positiva heltal och talet $x^2 + 4y^2 + 1$ är ett primtal som är en faktor i talet $8xy + 2$. Vilka av följande påståenden är nödvändigtvis korrekta?

a) Talet x är jämnt.
b) Talet $8xy + 2$ är delbart med fem.
c) Kvoten $\dfrac{8xy+2}{x^2+4y^2+1}$ är mindre än fyra.
d) Talet y är jämnt.

4. I bilden (som inte är mätexakt) nedan har man ritat in en triangel ABC och några sträckor. Ytterligare vet vi om de betecknade vinklarna i figuren att $\beta = 20°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 60°$ och $\epsilon = 50°$. Bestäm vinkeln ϕ i figuren.



5. Ta reda på alla heltalspar (x, y) för vilka gäller att

$$x^2 + xy + 2x + y = 100.$$

6. Man säger att man, på ett rutpapper med 5×5 rutor, har *fem kryss i följd* om dessa fyller en hel rad, kolumn eller någondera av diagonalerna. Bestäm det minsta antalet kryss med vilka du kan få till stånd ett sådant läge på rutpappret att fastän man skulle avlägsna vilket kryss som helst så skulle det fortfarande finnas fem kryss i följd på rutpappret.

31. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2018

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

31. 10. 2018

1. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^2 - y^2 = 2018$$

och ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den nämnda ekvationen.

2. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel och anta att d är avståndet mellan punkten B och sidan AC. Bevisa att $|AB| = |AC|$ om och endast om det för varje punkt D på sidan BC gäller att $d = d_0 + d_1$ när d_0 är avståndet mellan D och AB och d_1 är avståndet mellan D och AC.

3. Vid ett runt bord sitter n stycken riddare. Var och en av dem har en lampa och en avbrytarknapp framför sig. När en riddare trycker på knappen ändras läget inte bara på hans egen lampa utan även på de två bredvidliggande lamporna, dvs. en lampa som är släckt börjar lysa och en lampa som brinner släcks. I början är vissa lampor släckta medan andra lampor lyser. Bestäm alla sådana heltal $n > 3$ att riddarna med någon knapptryckningskombination kan släcka alla lampor oberoende av hur läget i början ser ut.

4. Anta att $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion för vilken $f(150) = 25$ och

$$f(x) + f(2f(x)) = 100$$

för alla reella tal x. Bestäm alla möjliga värden för talet $f(100)$.

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

High School Mathematics Competition
First Round, Basic Level

31. 10. 2018

The problems are on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. The ratio between number of pupils in high schools A and B was a/b at the end of the year 2017. During the year 2017 the number of pupils in high school A had increased by 5 % and the number of pupils in high school B by 10 %. At the end of the year 2017, the ratio between the number of students was

a) $\dfrac{95a}{90b}$	b) $\dfrac{105a}{110b}$	c) $\dfrac{22a}{21b}$	d) $\dfrac{19a}{18b}$

2. What can we say about the exact value of the expression $k^{3x} - k^x$, for $k^{2x} = 16$ and $k > 0$.

a) The problem cannot be solved as the answer depends on the values of x and k.
b) Its value is 56.
c) Its value is 60.
d) Its value is an irrational number.

3. A square rotates $45°$ around its center forming a star-shaped hexadecagon (16-gon). The ratio between the perimeter of the hexadecagon to the perimeter of the square is

a) less than 1,5	b) $4 - 2\sqrt{2}$	c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$	d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

4. Consider the equation

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a,$$

where the unknown x is different from 1 and $a \in \mathbb{R}$ is a constant. What can we say about the number of solutions?

a) For a suitable parameter value a the equation can have infinitely many solutions.
b) For some parameter values a, the equation does not have a solution.
c) The equation always has solutions regardless of the value of a.
d) The equation always has three solutions.

5. Ten (distinct) lines divide a plane in different areas, the number of which can vary depending on how the lines are drawn. The number of areas can be

a) 20.	b) 9.	c) 56.	d) 32.

6. A mathematically disturbed frogs leaps on the plane. The length of every leap is exactly $\sqrt{5}$. Furthermore, the frog suffers from a number-theoretical syndrome, and therefore it always lands in a point with integer coordinates. The frog starts in the origin, and returns to the origin after four leaps. In how many ways can frog perform a sequence of such four leaps? What can we say about the number of solutions?

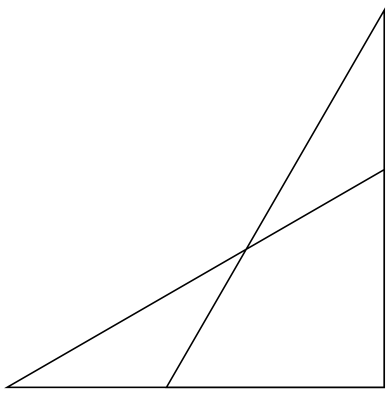
a) The frog can perform the sequence in over one hundred different ways.
b) The number of solutions is divisible by eight.
c) The number of solutions is divisible by five.
d) The frog can perform the sequence in at most 80 different ways.

7. Solve the Diophantine equation

$$x^2 - y^2 = 2018$$

(that is, find all pairs (x, y) of integers satisfying the equation).

8. In the following figure, we have two right triangles. In both of them, the length of the shorter catheti are 1 and the bigger ones of the sharp angles are equal to 60 degrees. Determine the common area.



Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

31. 10. 2018

The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **The use of calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

31. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Intermediate Level

2018

The problems are on two pages; the first three problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. An arithmetic sequence has an even number of terms. The first term (the term with index 1) is 1. The sum of the terms with even indices is 210 and the sum of the terms with odd indices is 190. Then:

a) The sequence has in total 20 terms.
b) The difference between two consecutive terms is 4.
c) The last term is 38.
d) The last term is 39.

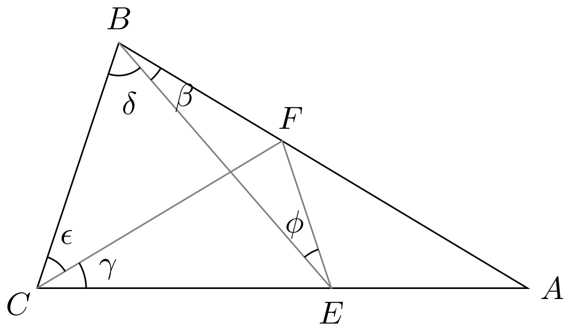
2. A square rotates $45°$ around its centre forming a star-shaped hexadecagon (16-gon). The ratio between the perimeter of the hexadecagon to the perimeter of the square is

a) less than 1.5. b) $4 - 2\sqrt{2}$. c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$. d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.

3. Assume that x and y are positive integers and that $x^2 + 4y^2 + 1$ is a prime which divides $8xy + 2$. Which of the following claims are true?

a) We know that x is even.
b) We know that $8xy + 2$ is divisible by five.
c) The quotient $\dfrac{8xy + 2}{x^2 + 4y^2 + 1}$ is smaller than four.
d) We know that y is even.

4. In the following figure, the triangle ABC and some lines have been drawn but the lengths of these are not necessarily accurate or up to scale in the figure. Furthermore, we know that $\beta = 20°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 60°$ and $\epsilon = 50°$. Determine the angle ϕ.



5. Find all pairs of integers x and y satisfying the equation

$$x^2 + xy + 2x + y = 100.$$

6. We say that a 5×5 board has *five consecutive crosses*, if these crosses fill a full line, column, or one of the two diagonals. Determine the smallest possible number of crosses that can be put on the board in such a way that even if one of the crosses is wiped out, the remaining crosses still have some five consecutive crosses.

31. 10.

Intermediate Level Multiple Choice

Answer Sheet

2018

The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

31. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Open Level

2018

1. Solve the Diophantine equation

$$x^2 - y^2 = 2018$$

(that is, find all pairs (x, y) of integers satisfying the equation).

2. Let ABC be an acute triangle and assume that d is the distance between B and AC. Prove that $|AB| = |AC|$ if and only if for every point D on the side BC, we have $d = d_0 + d_1$ where d_0 is the distance between D and AB and d_1 is the distance between D and AC.

3. Let us consider n knights sitting around a round table. Everyone of them has a light and a light switch in front of them. When a knight presses the switch, it doesn't only affect his own light but also the lights of the knigths sitting next to him: if a light has been turned off, it will become turned on, and if it has been turned on, it will be turned off. In the beginning some lights are turned on and some of them are turned off. Find all integers $n > 3$ such that regardless of the initial state of the lights, the knights can turn off all the lights by a suitable combination of using the switches.

4. Assume $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function satisfying the conditions $f(150) = 25$ och

$$f(x) + f(2f(x)) = 100$$

for all real numbers x. Find all possible values of $f(100)$.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

31. 10. 2018

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	+	−
2.	−	−	+	−
3.	+	+	+	−
4.	+	+	−	−
5.	+	−	+	+
6.	+	+	−	−

P1. Merkitään lukion A oppilasmäärää vuoden 2017 alussa x:llä ja lukion B oppilasmäärää y:llä. Vuoden 2017 lopussa oppilasmäärät ovat siis $a = 1{,}05x$ ja $b = 1{,}10y$, mistä saadaan vuoden 2017 alun oppilasmäärien suhteeksi

$$\frac{x}{y} = \frac{a/1{,}05}{b/1{,}10} = \frac{1{,}10a}{1{,}05b} = \frac{22a}{21b}.$$

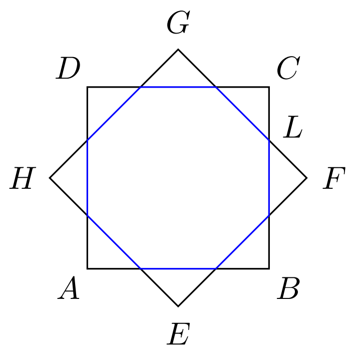
Siis kohta c on oikein, ja muut väärin, koska niissä annetut vastaukset eivät ole yhtä suuria oikean vastauksen kanssa.

P2. Koska $k^{2x} = 16$ ja $k > 0$, niin

$$k^{3x} - k^x = (k^{2x})^{3/2} - (k^{2x})^{1/2} = 16^{3/2} - 16^{1/2} = 16\sqrt{16} - \sqrt{16} = 16 \cdot 4 - 4 = 60.$$

Siis kohta c on oikein. Sen sijaan muut kohdat ovat väärin, sillä $60 \neq 56$ on rationaaliluku, ja vastaus on riippumatoman lukujen k ja x arvoista, kunhan oletukset pätevät.

P3. Koska kaikki kuvatulla tavalla 16-kulmiot ovat yhdenmuotoisia, voidaan olettaa, että alkuperäisen neliön kärjet ovat pisteissä $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ ja $D = (-1, 1)$. Koska neliön $ABCD$ lävistäjän pituus on $2\sqrt{2}$ ja kierretyn neliön lävistäjät ovat koordinaattiakseleilla origon suhteen symmetrisesti, kierretyn neliön $EFGH$ kärjet ovat siis $E = (\sqrt{2}, 0)$, $F = (0, \sqrt{2})$, $G = (-\sqrt{2}, 0)$ ja $H = (0, -\sqrt{2})$. Edelleen huomataan, että syntyvän 16-kulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, vaikka se ei ole säännöllinen, sillä 16-kulmion on symmetrinen 45° asteen kierron suhteen.



Lasketaan neliöiden sivujen BC ja FG leikkauspisteen L koordinaatit. Koska $B = (1, -1)$ ja $C = (1, 1)$, niin $L = (1, y)$. Toisaalta sivulla FG koordinaattien summa on $\sqrt{2}$, joten $y = \sqrt{2} - 1$. Tästä seuraa, että 16-kulmion sivun pituus on

$$|LC| = |1 - y| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}.$$

Piirien suhde on siis

$$\frac{16 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 \cdot 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Toisaalta

$$\frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

joten kohdat b ja c ovat molemmat oikein. Toisaalta $4 - 2\sqrt{2} < 4 - 2 \cdot 1{,}4 = 4 - 2{,}8 = 1, 2$, joten myös kohta a on oikein. Sen sijaan $\frac{2\sqrt{2}+1}{2} > \frac{2+1}{2} = 1{,}5$, joten kohta d on väärin.

P4. Kun $x \neq 1$, niin

$$\begin{aligned}\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a &\iff 2x + a^2 - 3a = a(x - 1) = ax - a \\ &\iff (2 - a)x + a^2 - 2a = 0 \iff (2 - a)(x - a) = 0.\end{aligned}$$

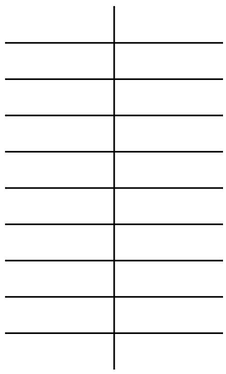
Jos $a = 2$, niin yhtälö supistuu identtisesti todeksi yhtälöksi, joten vaihtoehto a on oikein. Jos $a \neq 2$, niin $(2-a)(x-a) = 0 \iff x = a$, mutta koska $x \neq 1$, niin yhtälölle ei jää ratkaisuja, kun $a = 1$. Siis kohta b on oikein. Vaihtoehdot c ja d ovat ristiriidassa kohdan b kanssa, joten ne ovat väärin.

P5. Olkoon $m(k)$ pienin mahdollinen määrä alueita ja $M(k)$ suurin mahdollinen määrä alueita, jotka syntyvät, kun k suoraa jakaa tason alueisiin. Selvästi $m(1) = M(1) = 2$. Jokainen lisätty suora lisää alueiden määrää vähintään yhdellä ja enintään $k+1$:lla, missä k on tasoon aiemmin piirrettyjen suorien määrä, ts. $m(k+1) = m(k)+1$ ja $M(k+1) = M(k)+k+1$. Jälkimmäisen rekursiokaavan voi päätellä niin, että lisättävällä suoralla on korkeintaan k leikkauspistettä aiemmin piirrettyjen suorien kanssa, joten aiemmat suorat jakavat uuden suoran korkeintaan $k+1$:ksi janaksi ja puolisuoraksi, jotka ovat uusien alueiden reunoja. Erityisesti saadaan

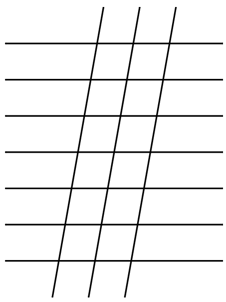
$$m(10) = m(1) + 9 = 2 + 9 = 11 \text{ ja } M(10) = M(1) + \sum_{k=1}^{9}(k+1) = 2 + 9 \cdot 6 = 56.$$

Vaihtoehto c on siis oikein ja b väärin.

Koska $11 < 20 < 32 < 56$, täytyy erikseen tutkia, voidaanko kymmenen suoraa asetella sopivalla tavalla niin, että alueiden määräksi tulee 20 tai 32. Molemmat osoittautuvat mahdollisiksi. 20 aluetta saadaan niin, että 9 yhdensuuntaista suoraa jakaa tason ensin 10 osaan ja yksi erisuuntainen puolittaa alueet.



Vastaavasti $32 = 4 \cdot 8$, mikä määrä alueita saadaan, kun 7 yhdensuuntaista suoraa jakaa ensin tason 8 osaan ja sen jälkeen 3 näiden kanssa erisuuntaista, mutta keskenään samansuuntaista suoraa jakaa kunkin osan neljään alueeseen.

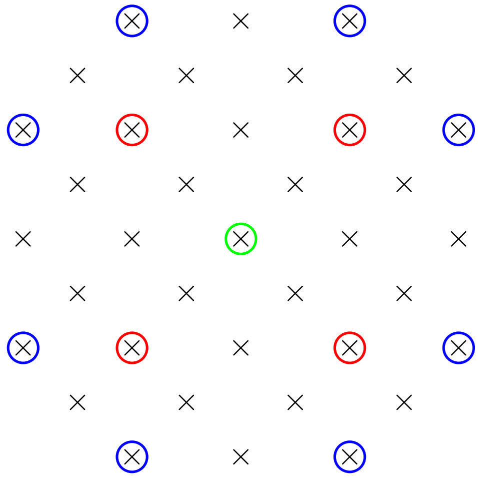


Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein.

P6. Kahden loikan jälkeen sammakko on pisteessä (x, y), jolle $x + y$ on parillinen ja $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2\sqrt{5}$ eli $x^2 + y^2 \leqslant 20$. Tällaiset pisteet ovat kaikki neliön $[-4, 4] \times [4, 4]$ sisällä, mutta eivät ole ao. neliön kärkiä. Huomataan, että näitä pisteitä on

$$\lceil 9^2/2 \rceil - 4 = 37$$

kappaletta. Tarkastellaan ensin eri kahden loikan tapauksia.



a) Jos $(x, y) = (\pm 4, \pm 2)$ tai $(x, y) = (\pm 2, \pm 4)$, niin sammakko pääsee pisteeseen (x, y) kahdella loikalla vain yhdellä tavalla. Näitä pisteitä (merkitty kuvassa sinisellä ympyrällä $\bigcirc$) on 8 kappaletta.

b) Sammakko ei itse asiassa pääse kahdella loikalla lainkaan pisteisiin $(\pm 2, \pm 2)$, joita on neljä kappaletta (kuvassa $\bigcirc$). Kaikkiin muihin 33 pisteeseen sammakko pääsee.

c) Sammakko pystyy yhdellä loikalla siirtymään kahdeksaan eri pisteeseen, ja pääsee tietenkin mistä tahansa niistä palaamaan origoon (kuvassa $\bigcirc$.

d) Jos (x, y) on jokin muu kahdella loikalla tavoitettavissa oleva piste, niin sen voi tavoittaa kahdella eri tavalla, sillä origo- ja (x, y)-keskiset, $\sqrt{5}$-säteiset ympyrät leikkaavat kahdessa pisteessä.

Kahdella viimeisellä loikalla sammakko joutuu palaamaan takaisin siitä pisteestä, mihin se joutui kahdella ensimmäisellä, ja paluutuplaloikka on samassa tapauskategoriassa kuin menotuplaloikka. Siten erilaisia neljän loikan sarjoja on

$$8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 8^2 + (37 - 12 - 1) \cdot 2^2 = 8 + 64 + 24 \cdot 4 = 168.$$

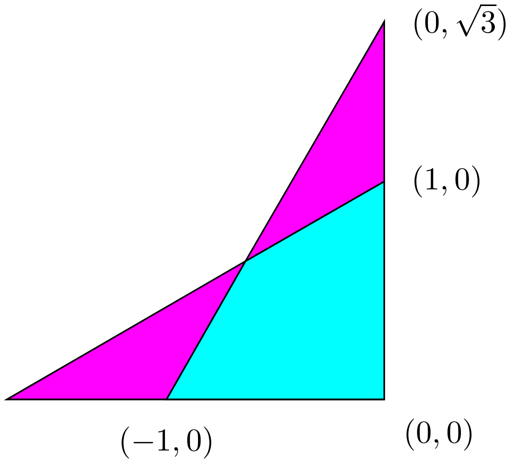
Koska $80 < 100 < 168$, niin kohta a on oikein ja d väärin. $168 = 21 \cdot 8$, joten $8 \mid 168$, mutta selvästi $5 \nmid 168$. Siis b on oikein ja c väärin.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Koska $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, niin yhtälön $x^2 - y^2 = 2018$ ratkaisut saataisiin sopivasta kokonaisluvun 2018 tekijöihinjaosta. Oletetaan, että nämä kokonaisluvut olisivat a ja b eli $2018 = ab$, ja jollekin ratkaisulle pätisi $x + y = a$ ja $x - y = b$. Tällöin

$2x = (x+y)+(x-y) = a+b$, joten tekijöihinjaossa tekijöiden summan pitäisi olla parillinen. Kuitenkin luvun 2018 alkutekijäesitys on $2018 = 2\cdot 1009$, joten missä tahansa tekijöihinjaossa toinen tekijä on parillinen ja toinen pariton. Siis Diofantoksen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

P8. Tehtävän kuviossa on kaksi ns. koululaisen kolmiota, jotka saadaan puolittamalla tasasivuinen kolmio pitkin keskijanaa. Siis pienemmän kateetin pituus on 1, hypotenuusan 2 ja suuremman kateetin $\sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$. Piirretään kolmiot koordinaatistoon, yhteinen suora kulma origoon.



Tehtävässä kysytään kuvan syaaninvärisen nelikulmion pinta-alaa; selvitetään ratkaisua varten nelikulmion neljännenkin kärjen koordinaatit.

Hypotenuusojen yhtälöt ovat

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1, \end{cases}$$

sillä kulmakertoimet ovat kateettien suhteiden mukaiset ja hypotenuusat päättyvät y-akselille tunnettuihin pisteisiin. Hypotenuusojen leikkauspisteen x-koordinaatiksi saadaan

$$\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1,$$

eli

$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

Symmetrian avulla (tai yhtälöihin sijoittamalla) saadaan y-koordinaatiksi

$$y = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Merkitään selvitettävää pinta-alaa A:lla. Kummankin koululaisen kolmion pinta-ala on $1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$, joten koko kuvion pinta-ala on $\sqrt{3} - A$. Toisaalta alemman sinipunaisen kolmion x-akselilla sijaitsevan kannan pituus on $\sqrt{3} - 1$ ja sitä vastaava korkeus nelikulmion neljännen kärjen y-koordinaatti eli $(3 - \sqrt{3})/2$. Siis sinipunaisen kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{3 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3).$$

Kuvion pinta-ala tämän avulla laskettuna on

$$2\sqrt{3} - 3 + A,$$

mistä saadaan yhtälö

$$\sqrt{3} - A = 2\sqrt{3} - 3 + A \iff 3 - \sqrt{3} = 2A \iff A = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Vastaus: *Yhteinen pinta-ala on* $(3 - \sqrt{3})/2$.

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	+	−	−	+
2.	+	+	+	−
3.	+	−	+	−

V1. Merkitään aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotusta d:llä ja jäsenten lukumäärää $2k$:lla, missä $k \in \mathbb{Z}_+$. Järjestysluvultaan parittomista jäsenistä ensimmäinen on 1 ja viimeinen $1 + (2k-2)d$, parillista järjestyslukua olevilla nämä ovat vastaavasti $1 + d$ ja $1 + (2k-1)d$. Tiedetään, että

$$k \cdot \frac{1 + (1 + (2k-2)d)}{2} = 190 \text{ ja } k \cdot \frac{(1+d) + (1 + (2k-1)d)}{2} = 210,$$

mistä seuraa

$$20 = 210 - 190 = k \cdot \frac{(1+d) + (1 + (2k-1)d)}{2} - k \cdot \frac{1 + (1 + (2k-2)d)}{2} = k \cdot \frac{d+d}{2} = kd.$$

Siis $210 = k \cdot \frac{(1+d)+(1+(2k-1)d)}{2} = k(1 + kd) = k \cdot 21$, joten $k = 10$ ja $d = 2$. Jonossa on siis $2k = 20$ jäsentä (kohta a on oikein), mutta peräkkäisten erotus on vain 2 (kohta b väärin). Lukujonon viimeinen jäsen on $1 + (2k-1)d = 1 + 19 \cdot 2 = 39$, joten c on väärin ja d oikein.

V2=P3.

V3. Luku $8xy + 2 = 2(4xy + 1)$ on aina parillinen ja yhdistetty luku, sillä $4xy + 1 > 1$. Siis $x^2 + 4y^2 + 1 < 8xy + 2$, koska luku $x^2 + 4y^2 + 1$ on alkuluku. Luvun $8xy + 2$ suurin tekijä on luonnollisesti $8xy + 2$, ja toiseksi isoin on $(8xy + 2)/2 = 4xy + 1$. Siispä $x^2 + 4y^2 + 1 \leqslant 4xy + 1$. Tästä seuraa

$$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 \leqslant 0.$$

Koska neliö $(x - 2y)^2$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla, on itse asiassa oltava $(x - 2y)^2 = 0$, eli $x = 2y$. Siten luku x on parillinen ja a)-kohta tosi. Ja c)-kohdan osamäärä on

$$\frac{8xy + 2}{x^2 + 4y^2 + 1} = \frac{16y^2 + 2}{8y^2 + 1} = 2,$$

ja koska $2 < 4$, on myös c)-kohta varmasti tosi.

Toisaalta, jos valitaan vaikkapa $x = 6$ ja $y = 3$, niin luku

$$x^2 + 4y^2 + 1 = 73$$

on alkuluku ja luku

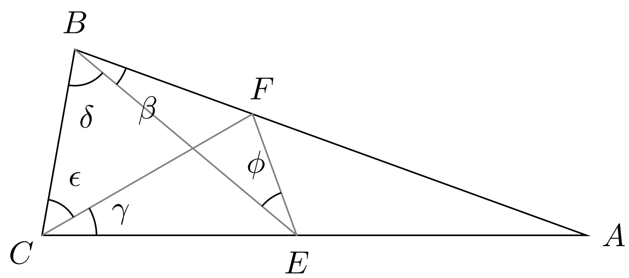
$$8xy + 2 = 146 = 2 \cdot 73$$

on jaollinen luvulla $x^2 + 4y^2 + 1$, eli tämä lukupari toteuttaa tehtävänannon ehdot. Koska luku 3 ei ole parillinen, eikä luku 146 viidellä jaollinen, eivät kohdat b) ja d) välttämättä pidä paikkaansa.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4.

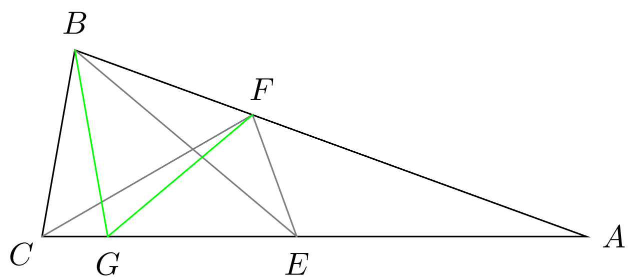
Alla on tehtävästä mittatarkka kuva.



Huomataan, että kuvaan liittyvistä kolmioista ABC, BCF ja EAB ovat tasakylkisiä (huippu mainittu ensin), sillä

$$\begin{cases} \sphericalangle ABC = \beta + \delta = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = 50^\circ + 30^\circ = \epsilon + \gamma = \sphericalangle BCA \\ \sphericalangle BCF = \epsilon = 50^\circ = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 180^\circ - (\beta + \delta) - \epsilon = \sphericalangle CFB \\ \sphericalangle EAB = \sphericalangle CAB = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ = \beta = \sphericalangle ABE. \end{cases}$$

Erityisesti $|AB| = |AC|$, $|BC| = |BF|$ ja $|AE| = |BE|$. Otetaan vielä käyttöön apupiste, joka sijaitsee sivulla AC niin, että kolmio BCG on myös tasakylkinen ja B sen huippu.



Koska $\sphericalangle GBC = 180° - 2\sphericalangle BCG = 180° - 2\sphericalangle BCA = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$, niin $\sphericalangle FBG = \sphericalangle FBC - \sphericalangle GBC = \beta + \delta - 20° = 60°$. Koska lisäksi $|BF| = |BC| = |BG|$, niin kolmio BGF on tasasivuinen ja siten $|FG| = |BF| = |BG|$. Kun huomataan vielä, että kolmio GEB on myös tasakylkinen ($\sphericalangle GEB = 180° - \sphericalangle AEB = 180° - (180°2 \cdot 20°) = 40°$ ja samoin $\sphericalangle EBG = \sphericalangle EBC - \sphericalangle GBC = \delta - 20° = 40°$), niin saadaan $|EG| = |BG| = |FG|$, joten kolmio GEF on tasakylkinen. Tästä seuraa $\sphericalangle GEF = (180° - 40°)/2 = 70°$. Siis $\phi = \sphericalangle GEF - \sphericalangle GEB = 70° - 40° = 30°$.

Vastaus: $\phi = 30°$.

V5. Yhtälö voidaan sieventää ensin muotoon

$$x^2 + 2x + 1 + (x+1)\,y = 101,$$

ja sitten muotoon

$$(x+1)^2 + (x+1)\,y = 101,$$

ja edelleen muotoon

$$(x+1)\,(x+1+y) = 101.$$

Luku 101 on alkuluku, ja vasemman puolen molemmat tekijät ovat kokonaislukuja. Siten kokonaisluvut x ja y toteuttavat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin, kun jokin seuraavista pätee:

$$\begin{cases} x+1 = -101 \\ x+1+y = -1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1+y = -101 \end{cases}$$

tai

$$\begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1+y = 101 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 101 \\ x+1+y = 1. \end{cases}$$

Jokaisella näistä yhtälöpareista on yksikäsitteinen kokonaislukuratkaisu. Kun nämä yhtälöparit ratkaisee, saamme tulokseksi, että kokonaisluvut x ja y ratkaisevat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin kun

$$\begin{cases} x = -102 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 100 \\ y = -100. \end{cases}$$

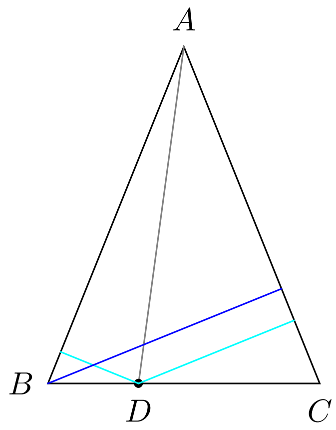
V6. Kymmenen rastia riittää, sillä näillä ruudukosta voidaan täyttää kaksi riviä, ja yhden rastin poistaminen jättää aina yhden kokonaisen rivin. Tarkastellaan toisaalta tapausta, jossa rasteja on korkeintaan yhdeksän. Jos asetelmassa on vain kerran viisi rastia peräkkäin, niin niistä voi sopivan rastin pyyhkimällä saada aikaan lopputuloksen, jossa ei ole rasteja peräkkäin. Vielä triviaalimpi on tilanne, jossa alun perinkään ei ole viittä rastia peräkkäin. Oletetaan siis, että asetelmassa olisi ainakin kaksi viiden peräkkäisen suoraa. Näiden on pakko leikata, sillä muuten rasteja olisi valmiiksi kymmenen. Kahdessa viiden suorassa on siis rasteja yhteensä $5 + 5 - 1 = 9$, joten muita rasteja ei voi olla. Siis pyyhkimällä leikkausrasti saadaan kaikki viiden peräkkäiset suorat poistettua. Siis yhdeksän rastia ei riitä.

Vastaus: *Kymmenen rastia riittää ja tarvitaan.*

Avoin sarja

A1=P7.

A2. Olkoon ABC teräväkylkinen kolmio, d pisteen B etäisyys sivusta AC, D sivun BC piste, d_0 pisteen D etäisyys sivusta AC ja d_1 sivusta AB. Esimerkkikuva on tasakylkinen, etäisyys d on merkitty sinisellä sekä etäisyydet d_0 ja d_1 syaanilla.



Huomataan, että jana AD jakaa kolmion ABC kolmioihin ABD ja ADC. Lasketaan kolmion ABC pinta-ala kahdella tavalla, toisaalta vetoamalla siihen, että d on sivun AC vastainen korkeus, toisaalta laskemalla pinta-ala pikkukolmioiden pinta-alojen summana. Saadaan

$$\frac{d}{2}|AC| = \frac{d_0}{2}|AB| + \frac{d_1}{2}|AC|.$$

Jos $|AB| = |AC|$, niin tämä yhtälö supistuu muotoon $d = d_0 + d_1$. Jos taas $|AB| < |AC|$ ja $D \neq B$, niin

$$\frac{d}{2}|AC| = \frac{d_0}{2}|AB| + \frac{d_1}{2}|AC| < \left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{2}\right)|AC|,$$

mistä seuraa $d < d_0 + d_1$. Jäljelle jäävässä vaihtoehdossa $|AB| > |AC|$ ja $D \neq B$ saadaan vastaavasti $d > d_0 + d_1$. Siis kun $|AB| \neq |AC|$, niin myös $d \neq d_0 + d_1$ riippumatta pisteestä D, kunhan $D \neq B$. $\square$

A3. Ritarit saavat joka lähtötilanteesta kaikki lamput sammutettua, paitsi jos $3 \mid n$.

Tarkastellaan katkaisimien painallusjonojoa. Ensimmäinen huomio on, että jokaisen lampun kannalta vain sillä, onko sen läheisyydessä olevia kolmea katkaisinta painettu parittoman vain parillisen monta kertaa, on merkitystä. Tämä myös merkitsee, että minkään ritarin ei kannata painaa katkaisintaan kuin korkeintaan kerran. Oletetaan jatkossa, ettei kukaan ritareista siis paina nappiaan kahdesti tai useammin. Painallusten järjestyksellä ei myöskään ole väliä, joten tarkasteltavana on 2^n erilaista painallusyhdistelmää. Huomattakoon, että lamppujen erilaisia aloitustiloja on myös 2^n. Tarkastellaan kahta tapausta sen mukaan, onko n jaollinen kolmella. Indeksöidään ritarit syklisesti modulo kolme.

a) Oletetaan, että $3 \mid n$. Jos kaikki lamput ovat aluksi poissa päältä, niin on ritarien tehtävällä on triviaali ratkaisu, nimittäin olla painamatta mitään katkaisinta. On kuitenkin myös epätriviaali ratkaisu, nimittäin ensin kaikki ritarit, jotka on indeksöity kolmella jaollisilla luvilla, painavat katkaisinta, jolloin kaikki lamput syttyvät. Sen jälkeen kaikki indeksejä $k \equiv 1 \pmod 3$ olevat ritarit tekevät saman, ja lamput sammuvat. Koska yhteen alkuasetelmista on ainakin kaksi ratkaisua ja alkutiloja on yhtä monta kuin tarkasteltavia oleellisesti erilaisia painallusjonoja, niin kaikkia alkutiloja ei pystytä ratkaisemaan.

b) Oletetaan, että $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Riittää osoittaa, että jos kaikki lamput ovat aluksia sammuksissa, niin ritarit pystyvät sytyttämään minkä tahansa yksittäisen lamput. Voidaan olettaa, että tämä on lamppu 2. Kun ritarit 1 ja 2 painavat katkaisintaan, niin lamput 0 ja 3 jäävät päälle ja muut ovat sammuksissa. Vastaavasti jokaisella kokonaisluvulla k on mahdollista vaihtaa lamppujen $3k$ ja $3k + 3$ tila (muiden pysyessä ennallaan), joten induktiolla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja $3k$ ovat päällä ja muut sammuksissa. Koska $\mathrm{syt}(n, 3) = 1$, kokonaisluku k voidaan valita niin, että $3k \equiv 1 \pmod n$. Tällä luvun k valinnalla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja 1 ovat päällä ja muut sammuksissa. Kun ritari 1 nyt painaa katkaisintaan, niin vain lamppu 2 on päällä.

A4.

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 100 - \frac{x}{2}$$

toteuttaa tehtävänannon ehdot, sillä se on polynomina jatkuva, ja sille pätee $f(150) = 100 - 150/2 = 100 - 75 = 25$ ja

$$\begin{aligned} f(x) + f(2f(x)) &= 100 - \frac{x}{2} + 100 - \frac{1}{2}\left(2 \cdot \left(100 - \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= 100 - \frac{x}{2} + 100 - 100 + \frac{x}{2} = 100, \end{aligned}$$

kun $x \in \mathbb{R}$. Siten luvun $f(100)$ yksi mahdollinen arvo on $100 - 100/2 = 100 - 50 = 50$.

Olkoon sitten f mikä tahansa tehtävänannon ehdot toteuttava funktio. Koska

$$f(50) = f(2 \cdot 25) = f(2f(150)) = 100 - f(150) = 100 - 25 = 75,$$

saa f molemmat arvoista 25 ja 75. Jatkuvana funktiona sen täytyy myös saada arvo 50 jossakin pisteessä $a \in \,]50, 150[$. Nyt

$$f(100) = f(2 \cdot 50) = f(2f(a)) = 100 - f(a) = 100 - 50 = 50.$$

Siis luvun $f(100)$ ainoa mahdollinen arvo on 50.

Vastaus: 50 *on ainoa mahdollinen luvun* $f(100)$ *arvo.*