# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

11. 10. 2007

## Perussarja

**P1.** Merkitään $p$:llä paidan ja $h$:lla housujen hankintahintaa sekä $m$:llä näiden yhteistä myyntihintaa. Tiedetään, että

$$\frac{m-p}{p}\cdot 100\% = 20\% \text{ ja } \frac{m-h}{h}\cdot 100\% = -20\%$$

eli

$$m = 1{,}2p = \frac{6}{5}p = 0{,}8h = \frac{4}{5}h.$$

Siis $p = \frac{5}{6}m$ ja $h = \frac{5}{4}m$, joten

$$p+h = \left(\frac{5}{6}+\frac{5}{4}\right)m = \frac{5\cdot 4 + 6\cdot 5}{6\cdot 4}m = \frac{50}{24}m = \frac{25}{12}m > 2m.$$

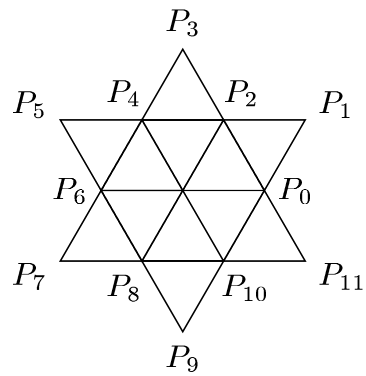
Siis kulut tuotteista olivat suuremmat kuin saatu hinta, joten *kauppias kärsi tappiota kaupasta.*

**P2.** $2^{1000} = 2^{2\cdot 500} = (2^2)^{500} = 4^{500} < 5^{500} = 5^{2\cdot 250} = (5^2)^{250} = 25^{250} < 27^{250} = (3^3)^{250} = 3^{3\cdot 250} = 3^{750}$, joten *luvuista pienin on* $2^{1000}$*, keskimmäinen* $5^{500}$ *ja suurin* $3^{750}$.

**P3.** Tehtävän monikulmio olkoon $P_1P_2\cdots P_{12}$, jossa kärjet on lueteltu niin, että parittomilla $i$ kärkeä $P_i$ vastaava kulma on $60°$. Merkitään myös $P_0 = P_{12}$, $P_{-1} = P_{11}$ jne. Kolmio $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ on tasasivuinen, jonka sivu on $s$, sillä $s = |P_{i-1}P_i| = |P_iP_{i+1}|$ ja $\measuredangle P_{i-1}P_iP_{i+1} = 60°$, kun $i \in \{1,3,5,7,9,11\}$. Tästä seuraa, että kuusikulmion $P_0P_2P_4P_6P_8P_{10}$ kaikkien sivujen pituus on $s$. Toisaalta parillisilla $i \in \{0,2,4,6,8,10\}$ saadaan

$$\measuredangle P_{i-2}P_iP_{i+2} = \measuredangle P_{i-1}P_iP_{i+1} - \measuredangle P_{i+1}P_iP_{i+2} - \measuredangle P_{i-1}P_iP_{i-2} = 240° - 60° - 60° = 120°.$$

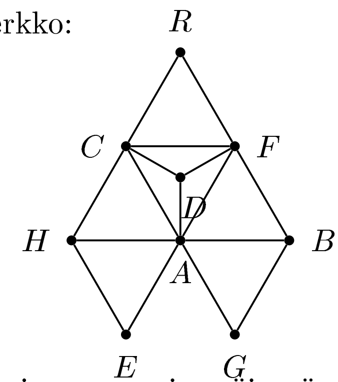
Koska kaikki kuusikulmion $P_0P_2P_4P_6P_8P_{10}$ sivut ja kulmat ovat yhtä suuria, niin kuusikulmio on säännöllinen. Se siis jakautuu kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden sivujen pituus on $s$.



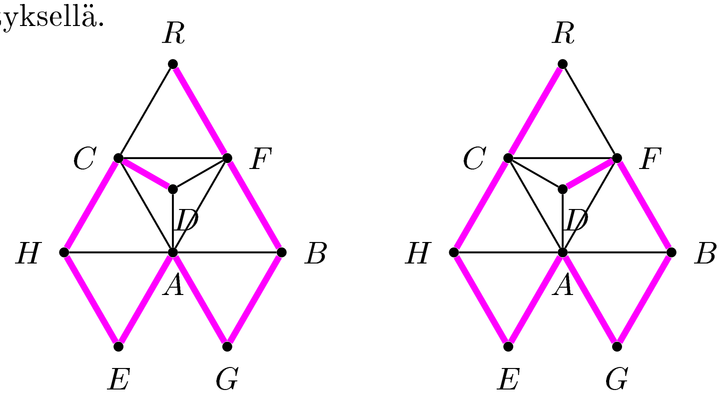

Koska kunkin tasasivuisen kolmion pinta-ala kuviossa on $\dfrac{s \cdot s\sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$, niin 12-kulmion pinta-ala on

$$(6+6) \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 3s^2\sqrt{3}.$$

**P4.** Piirretään puheväleistä verkko:




Ministerit $E$ ja $G$ eivät kuule juorua ensimmäisenä eivätkä viimeisenä ja ovat vain kahden ministerin kanssa puheväleissä, joten $E$ on kuullut juorun $A$:lta tai $H$:lta ja kertoo sen edelleen $H$:lle tai $A$:lle, kun taas $G$ on kuullut juorun $A$:lta tai $B$:ltä ja kertoo sen edelleen $B$:lle tai $A$:lle. Näistä viidestä ministeristä juorun on kuullut ensimmäisenä siis joko $B$ tai $H$. Edellisessä tapauksessa $B$ on kuullut juorun $R$:ltä $H$:n kautta ja $D$ taas $H$:lta $C$:n välityksellä, jälkimmäisessä tapauksessa taas $H$ on $R$:ltä $C$:n kautta ja $D$ $B$:ltä $F$:n välityksellä.




Molemmissa tapauksissa $A$ on kuullut juorun neljäntenä.

# Välisarja

**V1.** Merkitään kettujen osuutta $x$:llä. Jäniksien osuus on siis $1-x$ ja näistä 20% luulee olevansa kettuja. Ketuista taas vain 90% tietää olevansa kettuja. Haastattelututkimuksen mukaan

$$\begin{aligned} &(1-x)\cdot 0{,}2 + x\cdot 0{,}9 = 0{,}5 \\ \iff\ & 0{,}7x = 0{,}3 \\ \iff\ & x = \frac{3}{7} \approx 43\% \end{aligned}$$

**V2.** Merkitään ison neliön sivun pituutta $s$:llä ja puoliympyrän sädettä $r$:llä. Tällöin Pythagoraan lauseen mukaan toisaalta

$$r^2 = \frac{s}{2}^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2$$

toisaalta

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}+4\right)^2 + 4^2 = \frac{s^2}{4} + 4s + 32,$$

joten

$$\frac{5}{4}s^2 = \frac{s^2}{4} + 4s + 32 \iff s^2 - 4s - 32 = 0 \iff s = 2 \pm \sqrt{2^2+32} = 2 \pm 6 \iff s = 8,$$

sillä $s > 0$. *Isomman neliön sivun pituus on siten 8.*

**V3.** Ensimmäinen oppilas ratkaisi itse asiassa yhtälön $x^2 + b^*x + c = 0$ ja toinen yhtälön $x^2 + bx + c^* = 0$, missä $b^* \neq b$ ja $c^* \neq c$. Ensimmäisen oppilaan yhtälön juurien tulo on

$$2 \cdot 3 = c$$

ja toisen oppilaan yhtälön juurien summa on

$$2 + 5 = -b.$$

Siis $b = -7$ ja $c = 6$, joten alkuperäinen ratkaistava yhtälö oli

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \iff (x-1)(x-6) = 0 \iff x = 1 \vee x = 6.$$

*Oikeat juuret olivat siis* $1$ *ja* $6$.

**Huomautus:** Tehtävän voi tietenkin ratkaista tuntematta juurten summaa ja tuloa sijoittamalla ratkaisut takaisin yhtälöihin. Näin saadaan neljän yhtälön ryhmä

$$\begin{cases} 4 + 2b^* + c = 0 \\ 9 + 3b^* + c = 0 \\ 4 + 2b + c^* = 0 \\ 25 + 5b + c^* = 0, \end{cases}$$

josta kertoimet $b$ ja $c$ saa myös selville.

**V4. Tapa 1:** Kun $k \in \mathbb{Z}_+$, yhtälöllä $x + y = k$ on selvästi $k - 1$ positiivista kokonaislukuratkaisua. Koska $x + y + z = 2007 \iff x + y = 2007 - z$, niin tehtävän yhtälöllä on siis $2006 - m$ ratkaisua jokaista $z = m$ kohti, missä $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq 2006$. Siis kaikkiaan ratkaisuja on

$$\sum_{m=1}^{2006}(2006 - m) = 2005 + 2004 + \cdots + 1 = 2005 \cdot \left(\frac{1 + 2005}{2}\right) = 2\,011\,015$$

kappaletta.

**Tapa 2:** $x + y + z = 2007 \iff (x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 2004$ ja jälkimmäinen yhtälö kuvaa tunnettua kombinatorista tilannetta, miten 2004 omenaa voidaan jakaa kolmen lapsen kesken. Jako voidaan tehdä niin, että omenat asetetaan riviin ja niiden välille asetetaan kaksi keppiä jakomerkeiksi. Yhteensä omenoita ja keppejä varten tarvitaan 2006 paikka, joista siis keppien paikat voi valita

$$\binom{2006}{2} = \frac{2006 \cdot 2005}{2} = 2\,011\,015$$

tavalla.

## Avoin sarja

**A1.** Paras tapa asettaa särmiö puolipallon sisään on niin, että pohjat tulevat vastakkain ja pohjien keskipisteet yhtyvät. Särmiön pohjan keskipisteen etäisyys yläkärjestä on

$$\sqrt{(12\text{ m}/2)^2 + (14\text{ m}/2)^2 + (5\text{ m})^2} = \sqrt{6^2 + 7^2 + 5^2}\text{ m} = \sqrt{110}\text{ m} \approx 10{,}5\text{ m}.$$

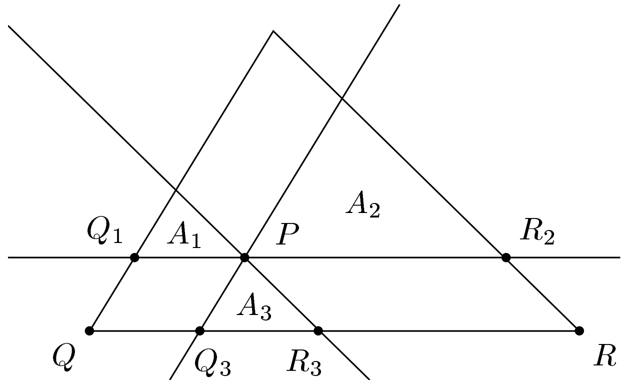
*Siis myös pienimmän sopivan pallon säde on* $110\text{ m} \approx 10{,}5\text{ m}$.

**A2.** Tarkasteltava luku on esitetty aritmeettisena summana, jossa yhteenlaskettavien keskiarvo on $((k + 19) + (19k + 1))/2 = 10k + 10$ ja yhteenlaskettavia on 19 kappaletta. Siis luku on $19 \cdot (10k + 10) = 190 \cdot (k + 1)$. Jotta tämä olisi neliöluku, on jokaisen alkuluvun esiinnyttävä luvun alkutekijäesityksessä parillisen monta kertaa. Koska $190 = 2 \cdot 5 \cdot 19$, on lukujen 2, 5 ja 19 myös jaettava $k + 1$, joten $k + 1 \geq 190$ eli $k \geq 189$. Toisaalta kun $k = 189$, niin $190 \cdot (k + 1) = 190^2$ eli neliöluku. *Pienin tehtävän ehdon toteuttava $k$ on siis $k = 189$.*

**A3.** Kunkin pikkukolmion sivuista yksi on kolmion $\Delta$ sivusta osa ja kaksi muuta kolmion $\Delta$ muiden sivujen kanssa yhdensuuntaisia. Kaikki tarkasteltavat kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia. Olkoon yksi kolmion $\Delta$ sivuista $a$ sekä $a_1$, $a_2$ ja $a_3$ vastaavat pikkukolmioiden sivut. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

$$\frac{A_\Delta}{a^2} = \frac{A_1}{a_1^2} = \frac{A_2}{a_2^2} = \frac{A_3}{a_3^2}.$$

Olkoot $Q$ ja $R$ sivun $a$ päätepisteet. Merkitään sivujen ja pisteen $P$ kautta kulkevien suorien leikkauspisteitä kuten kuvassa.




Tällöin $QQ_3PQ_1$ ja $R_3RR_2P$ ovat suunnikkaita, joten $|QQ_3| = a_1$ ja $|R_3R| = a_2$. Siis

$$a = |QR| = |QQ_3| + |Q_3R_3| + |R_3R| = a_1 + a_3 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3,$$

mistä neliöön korottamalla ja edellistä verrantoa käyttämällä seuraa

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 \\ \Rightarrow A_\Delta &= A_1 + A_2 + A_3 + 2\sqrt{A_1A_2} + 2\sqrt{A_1A_3} + 2\sqrt{A_2A_3}. \end{aligned}$$

**A4.** Huomataan, että $2007 = 9 \cdot 223$, joten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $9 \mid 2007n$. Toisaalta yhdeksällä jaollisuutta koskevan säännön mukaan luku on jaollinen yhdeksällä täsmälleen silloin, kun sen numeroiden summa on jaollinen yhdellä, joten jaollisuudesta $9 \mid 2007n$ seuraa $9 \mid f(n)$. Siis kuvauksen $f$ arvot ovat yhdeksällä jaollisia. Toisaalta $f(0) = 0$, $f(1)$ on luvun 2007 numeroiden summa eli $2+0+0+7 = 9$, $f(10001)$ on luvun 20 072 007 numeroiden summa eli $2+0+0+7+2+0+0+7 = 18 = 2 \cdot 9$, $f(100\,010\,001)$ on luvun 200 720 072 007 numeroiden summa eli $3 \cdot (2+0+0+7) = 3 \cdot 9$ ja yleisesti

$$f(\sum_{i=0}^{m-1} 10^{4i}) = m \cdot 9,$$

sillä luvussa

$$2007 \cdot \sum_{i=0}^{m-1} 10^{4i} = 2 \sum_{i=0}^{m-1} 10^{4i+3} + 7 \sum_{i=0}^{m-1} 10^{4i} = \underbrace{20072007 \cdots 2007}_{m \text{ toistoa}}$$

esiintyy nollien lisäksi $m$ kakkosta ja seitsemää. Siis kuvauksen $f$ arvojoukko on $\{\, 9n \mid n \in \mathbb{N} \}$.