Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

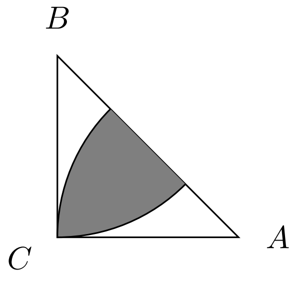
9. 10. 2008

1. Pinnalta punaiseksi maalattu $3 \times 3 \times 3$-kuutio jaetaan 27:ksi samankokoiseksi kuutioksi. Mikä osuus 27 pikkukuution kokonaispinta-alasta on punaiseksi maalattu?

2. Positiivisen kokonaisluvun n *kertoma* on tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Esimerkiksi $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Luvun n kertomaa merkitään symbolilla $n!$. Ratkaise N yhtälöstä

$$6! \cdot 7! = N!.$$

3. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ABC kyljen pituus on 2 ja kanta (eli hypotenuusa) AB. A- ja B-keskiset ympyrät, joiden säde on 2, sekä AB rajoittavat alueen. Määritä alueen ala.



4. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{17 + x - 8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} = 6.$$

Laskuaikaa on **100 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

9. 10. 2008

1. Suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan x, merkitään $\lfloor x \rfloor$:llä. Ratkaise yhtälö

$$x \cdot \lfloor x \rfloor = 50.$$

2. Pinnalta siniseksi maalattu kuutio jaetaan tahkojen suuntaisilla tasoilla 27 (mahdollisesti erisuureksi) kappaleeksi. Leikkauksia tehdään kaikkiin kolmeen suuntaan. Mikä osuus kappaleiden kokonaispinta-alasta on siniseksi maalattu?

3. Määritä suurin luvulla 11 jaollinen kokonaisluku, jossa mikään numero ei toistu, kun se esitetään kymmenjärjestelmässä.

4. Kolmion kärjet ovat $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$ ja $C = (6a, 6b)$, missä $a, b \neq 0$. Kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste on M, sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja korkeussuorien leikkauspiste on H. Laske suhde $MH : MO$.

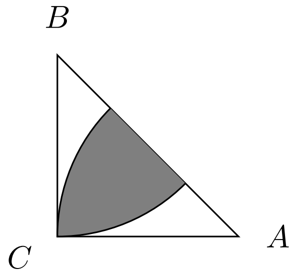
Laskuaikaa on **100 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

9. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2008

1. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ABC kyljen pituus on 2 ja kanta (eli hypotenuusa) AB. A- ja B-keskiset ympyrät, joiden säde on 2, sekä AB rajoittavat alueen. Määritä alueen ala.



2. Suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan x, merkitään $\lfloor x \rfloor$:llä. Ratkaise yhtälö

$$x \cdot \lfloor x \rfloor = 1000.$$

3. Origokeskinen ympyrä, joka kulkee käyrän $y = x^3 + ax$ maksimi- ja minimipisteen kautta, sivuaa tätä käyrää tasan kahdessa pisteessä. Määritä a.

4. Kutsutaan joukkoa $\{a-d, a, a+d\}$ *superkolmikoksi*, jos a on kokonaisluku ja $d = 2^k$ jollakin luonnollisella luvulla k.

a) Osoita, että on olemassa joukon $\{0, 1, 2, \ldots, 2008\}$ osajoukko A, jossa on 1340 alkiota ja joka ei sisällä superkolmikkoja.

b) Osoita, että jokainen joukon $\{0, 1, 2, \ldots, 2008\}$ osajoukko B, jossa on 1341 alkiota, sisältää kolme peräkkäistä kokonaislukua.

Laskuaikaa on **100 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

9. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

2008

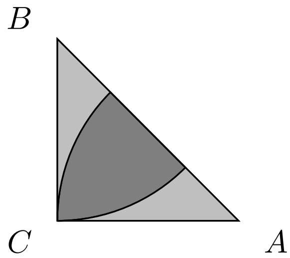
Perussarja

P1. Alkuperäisen punaisen kuution pinta koostuu kuudesta 3×3-neliöstä, joten sen ala on $6\cdot 3^2 = 54$. Koska $3^3 = 27$, kuutio jakautuu leikatessa 27 yksikkökuutioksi, joiden kokonaispinta-ala on $27\cdot 6 = 162$. *Punaiseksi maalattu osuus on siis*

$$\frac{54}{162} = \frac{6\cdot 3^2}{27\cdot 6} = \frac{3^2}{3^3} = \frac{1}{3}.$$

P2. $6!\cdot 7! = 7!\cdot 6! = 7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 7!\cdot(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 5\cdot 6) = 7!\cdot 8\cdot 90 = 8!\cdot 9\cdot 10 = 9!\cdot 10 = 10!$. Koska $m! > n!$, kun $m, n\in\mathbb{Z}$, $m > n > 0$, niin $N = 10$ *on ainoa positiivinen kokonaisluku, jolle* $6!\cdot 7! = N!$.

P3. Kysytty ala S on itse asiassa kahden ympyräsektorin leikkaus. Nämä ympyräsektorit peittävät kolmion ABC niin, että kolmio tulee leikkauksen kohdalla peitettyä kahdesti.



Koska kolmion ABC terävä kulma on $\frac{\pi}{4}$, ympyräsektorin pinta-ala on $S_{\text{sekt}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2^2 = \frac{\pi}{2}$. Ympyräsektorien yhdiste taas on kolmio ABC, jonka ala on $S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$. *Siis*

$$S = 2S_{\text{sekt}} - S_\triangle = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2.$$

P4. Koska

$$\begin{aligned}\sqrt{17 + x - 8\sqrt{x+1}} &= \sqrt{x + 1 - 2\cdot 4\sqrt{x+1} + 4^2}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x+1} - 4\right)^2} = \left|\sqrt{x+1} - 4\right|\end{aligned}$$

ja

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1-2\cdot 2\sqrt{x+1}+2^2}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2} = \left|\sqrt{x+1}-2\right|,$$

kun $x \geq -1$, niin

$$\sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = 6$$
$$\iff \left|\sqrt{x+1}-4\right| + \left|\sqrt{x+1}-2\right| = 6.$$

1° Kun $-1 \leq x \leq 3$, niin $0 \leq x+1 \leq 4$ ja $\sqrt{x+1} \leq 2$, joten

$$\sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = 6$$
$$\iff 4-\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x+1} = 6$$
$$\iff -2\sqrt{x+1} = 0 \iff \sqrt{x+1} = 0 \iff x+1 = 0$$
$$\iff x = -1.$$

2° Kun $3 \leq x \leq 15$, niin $4 \leq x+1 \leq 16 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x+1} \leq 4$, joten

$$\sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = 6$$
$$\iff 4-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-2 = 6 \iff 2 = 6$$

eli tässä tapauksessa ei saada ratkaisuja.

3° Kun $x \geq 15$, niin $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4$, joten

$$\sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = 6$$
$$\iff \sqrt{x+1}-4+\sqrt{x+1}-2 = 6$$
$$\iff 2\sqrt{x+1} = 12 \iff \sqrt{x+1} = 6 \iff x+1 = 36$$
$$\iff x = 35.$$

Siis yhtälön $\sqrt{17+x-8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} = 6$ *ratkaisut ovat* $x = 35$ *ja* $x = -1$.

Välisarja

V1&A2. Olkoon $m > 1$. Oletetaan, että m ei ole kokonaisluvun neliö. Tarkastellaan yleisesti yhtälöä

$$x \cdot \lfloor x \rfloor = m.$$

Merkitään $k = \lfloor \sqrt{m} \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Kun $|x| > k+1$, niin myös $|\lfloor x \rfloor| \geq k+1$ sekä x ja $\lfloor x \rfloor$ ovat samanmerkkisiä. Tällöin $x \lfloor x \rfloor \geq (k+1)^2 > (\sqrt{m})^2 = m$.

Kun $|x| \leq k$, niin $|\lfloor x \rfloor| \leq k$, joten lukujen x ja $\lfloor x \rfloor$ samanmerkkisyydestä seuraa $x \lfloor x \rfloor \leq k^2 < (\sqrt{m})^2 = m$. Aito epäyhtälö edellisessä seuraa siitä, että m ei ole kokonaisluvun neliö.

Siis $k < |x| < k+1$, joten $\lfloor x \rfloor = k$ tai $\lfloor x \rfloor = -k-1$. Edellisessä tapauksessa yhtälö $x \lfloor x \rfloor = m$ toteutuu, jos $x = \dfrac{m}{k}$ ja $\left\lfloor \dfrac{m}{k} \right\rfloor = k$, jälkimmäisessä tapauksessa saadaan vastaavasti yrite $x = \dfrac{-m}{k+1}$, josta täytyy tarkistaa, että $\left\lfloor \dfrac{-m}{k+1} \right\rfloor = -k-1$.

V1. Koska $m = 50$ ja $k = \lfloor \sqrt{50} \rfloor = 7$, niin saadaan yritteet $x = 50/7 = 7\frac{1}{7}$ ja $x = -50/8 = -25/4 = -6\frac{1}{4}$. Koska $\lfloor 50/7 \rfloor = /$ ja $\lfloor -50/8 \rfloor = -7 \neq -8$, niin ainoastaan $x = 7$ *on yhtälön ratkaisu.*

V2. Vrt. **P1.** Leikkaustaso voidaan asetella kolmeen eri suuntaan. Varsin helposti huomataan, että aina kaksi leikkaustasoista on yhdensuuntaisia. Merkitään nimittäin symboleilla x, y ja z kolmeen eri suuntaan tehtyjen leikkausten lukumääriä. Tällöin kuutio jakautuu $(x+1)(y+1)(z+1) = 27$ kappaleeseen. Koska $x, y, z > 0$, niin tekijähajotelmasta $27 = 3^3$ näkyy, että on oltava $x+1 = y+1 = z+1 = 3$ eli $x = y = z = 2$. Siis $x + y + z = 6$ on leikkausten lukumäärä.

Olkoon s sinisen kuution särmä. Kutakin tasoa vastaa kaksi leikkauspintaa, joiden alojen summa on $2s^2$. Leikkauspintojen kokonaisala on siis $6 \cdot 2s^2 = 12s^2$ ja alkuperäisen kuution tahkojen $6 \cdot s^2$. *Siis siniseksi maalatun pinnan osuus kokonaispinta-alasta on*

$$\frac{6s^2}{6s^2 + 12s^2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

V3. Olkoon n suurin luvulla 11 jaollinen kokonaisluku, jossa mikään numero ei toistu. Koska $132 = 11 \cdot 12$ on 11:llä jaollinen, niin $n \geq 132$, joten n on positiivinen. Merkitään k:lla luvun n numeroiden lukumäärää, jolloin numeroiden toistottomuuden vuoksi $k \leq 10$. Toisaalta $10^{k-1} \leq n < 10^k$, joten luvun n etsinnässä voidaan rajoittua lukuihin, joissa jokainen numero esiintyy (eli $k = 10$), kunhan n löytyy näiden joukosta.

Oletetaan siis, että $n = \sum_{k=0}^{9} a_k = a_9 \cdot 10^9 + a_8 \cdot 10^8 + \cdots + a_0$, jossa $\{a_0, \ldots, a_9\} = \{0, \ldots, 9\}$. Luvun 11 jaollisuussäännön mukaan luvun n numeroiden vuorotteleva summa

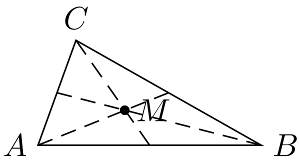
$$v = \sum_{k=0}^{9} a_k \cdot (-1)^{k+1} = a_9 - a_8 + a_7 - a_6 + a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0$$

on 11:llä jaollinen. Karkeasti ilmaisten positiivinen kokonaisluku, jossa esiintyvät toistotta kaikki numerot, on sitä suurempi, mitä aiemmin suuret numerot esiintyvät siinä. Suurin näistä, 9876543210, ei kuitenkaan ole 11:llä jaollinen, sillä $11 \nmid 5 = 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 - 0$.

Luvun n numeroiden summa on $s = \sum_{k=0}^{9} a_k = \sum_{k=0}^{9} k = 10 \cdot \frac{9+0}{2} = 45$. Numeroiden summa s ja vuorotteleva summa v ovat molemmat parittomia, sillä niiden erotus $s - v = 2(a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0)$ on parillinen. Rajoitutaan luvun n etsinnässä nyt lukuihin, jotka alkavat numeroilla 9, 8, 7 ja 6, sillä muut toistottomat luvut ovat pienempiä. Tällöin $v \geq 9-8+7-6+(2+1+0)-(5+4+3) = 2+3-12 = -7$ ja $v \leq 9-8+7-6+(5+4+3)-(2+1+0) = 2+12-3 = 11$. Koska $-7 \leq v \leq 11$, $11 \mid v$ ja v on pariton, jäljelle jää enää mahdollisuus $v = 11$. Tämä yhtäsuuruus saavutetaan vain, kun luvut $5, 4, 3$ vuorottelevat lukujen $2, 1, 0$ kanssa. *Tällaisista luvuista suurin on* $n = 9876524130$.

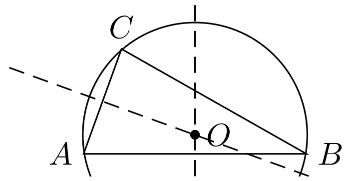
V4. Kolmion keskijanojen leikkauspiste on

$$M = \left(\frac{0+6+6a}{3}, \frac{0+0+6b}{3}\right) = (2a+2, 2b).$$



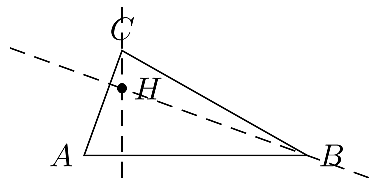
Sivun AC keskipiste on $(3a, 3b)$ ja suoran AC kulmakerroin $(6b-0)/(6a-0) = b/a$. Piste O on siis suorien $x = 3$ ja $y - 3b = -\frac{a}{b}(x-3a) = \frac{3a^2-ax}{b}$ leikkauspiste, joka on

$$O = \left(3, \frac{3a^2+3b^2-3a}{b}\right).$$



Vastaavasti H on suorien $x = 6a$ ja $y = -\frac{a}{b}(x-6) = \frac{6a-ax}{b}$ leikkauspiste, joten

$$H = \left(6a, \frac{6a-6a^2}{b}\right).$$



Nyt

$$\begin{aligned} OM^2 &= (3-(2a+2))^2 + \left(\frac{3a^2+3b^2-3a}{b} - 2b\right)^2 \\ &= (1-2a)^2 + \left(\frac{3a^2+b^2-3a}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} MH^2 &= (2a+2-6a)^2 + \left(2b - \frac{6a-6a^2}{b}\right)^2 = (2-4a)^2 + \left(\frac{6a-6a^2}{b} - 2b\right)^2 \\ &= 4(1-2a)^2 + 4\left(\frac{3a-3a^2-b^2}{b}\right)^2 = 4 \cdot MO^2. \end{aligned}$$

Kysytty suhde on siis $MH : MO = \sqrt{MH^2/MO^2} = \sqrt{4} = 2$.

Avoin sarja

A1. Ks. **P3.**

A2. Ks. **V2.** Tässä tapauksessa $m = 1000$ ja $k = \lfloor\sqrt{1000}\rfloor = 31$, niin saadaan yritteet $x = \dfrac{1000}{31} = 32\dfrac{8}{31}$ ja $x = \dfrac{-1000}{32} = -31\dfrac{1}{4}$. Koska $\left\lfloor\dfrac{1000}{31}\right\rfloor = 32 \neq 31$ ja $\left\lfloor\dfrac{-1000}{32}\right\rfloor = -32$, niin $x = -31\frac{1}{4}$ *on ratkaisu.*

A3. Käyrä $y = x^3 + ax$ on origon suhteen symmetrinen. Sen ääriarvokohdat saadaan yhtälöstä $3x^2 + a = 0$; jotta ääriarvokohtia olisi, on oltava $a < 0$. Ääriarvokohdissa $x^2 = -\dfrac{a}{3}$ ja $y^2 = (x^3 + ax)^2 = x^2(x^2 + a)^2 = -\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2 = -\dfrac{4a^3}{27}$. Tehtävän origokeskinen ympyrä on siis

$$x^2 + y^2 = -\frac{a}{3} - \frac{4a^3}{27} = -\frac{9a + 4a^3}{27}.$$

Ympyrän ja käyrän leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat yhtälön

$$x^2 + x^2(x^2 + a)^2 = -\frac{9a + 4a^3}{27}$$

juuret ja leikkauspisteiden x-koordinaattien neliöt yhtälön

$$t + t(t + a)^2 + \frac{9a + 4a^3}{27} = 0$$

juuret. Yhtälön yksi juuri on $t = -\dfrac{a}{3}$. Tämän perusteella yhtälön vasen puoli voidaan jakaa tekijöihin:

$$t + t(t + a)^2 + \frac{9a + 4a^3}{27} = \left(t + \frac{a}{3}\right)\left(t^2 + \frac{5a}{3}t + \frac{4a^2}{9} + 1\right).$$

Silloin, kun ympyrä ja käyrä sivuavat toisiaan, toisen asteen tekijän kaksi juurta yhtyvät (koska sivuamispiste ei voi olla alkuperäisen kolmannen asteen käyrän ääriarvokohdassa, jossa käyrän tangentti on x-akselin suuntainen, mutta ympyrän tangentti ei ole). Sivuamisen ehto on siis toisen asteen tekijän diskriminantin häviäminen eli

$$\frac{25a^2}{9} - \frac{16a^2}{9} - 4 = 0.$$

Siis $a^2 = 4$, ja koska $a < 0$, $a = 2$.

A4. a) Valitaan joukoksi A niiden kokonaislukujen $n \in \{0, \ldots, 2008\}$ joukko, joille $n \not\equiv 2 \pmod 3$ eli $n - 2$ ei ole kolmella jaollinen.

Väite: Joukossa A on 1340 alkiota ja se ei sisällä superkolmikkoja.

Todistus. Suurin luvuista $n \in \{0, \ldots, 2008\}$, jolle $n \equiv 2 \pmod 3$, on $2006 = 3 \cdot 668 + 2$ ja pienin $2 = 3 \cdot 0 + 2$. Tällaisia lukuja on siis 669 kappaletta ja joukossa A on $2009 - 669 = 1340$ alkiota.

Olkoon $\{a - d, a, a + d\}$ superkolmikko. Superkolmikon lukujen erotukset eivät ole kolmella jaollisia, sillä $(a + d) - a = a - (a - d) = d = 2^k$ ja $(a + d) - (a - d) = 2^{k+1}$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Siis superkolmikon luvut tuottavat kolmella jaettaessa eri jakojäännökset, ts. luvut 0, 1 ja 2, joten $a - d \equiv 2 \pmod 3$, $a \equiv 2 \pmod 3$ tai $a + d \equiv 2 \pmod 3$. Siis jokin superkolmikon alkioista ei kuulu joukkoon A. □

b) **Väite:** Jokainen joukon $\{0, 1, 2, \ldots, 2008\}$ osajoukko B, jossa on 1341 alkiota, sisältää kolme peräkkäistä kokonaislukua.

Todistus. Jaetaan joukko $\{0, \ldots, 2008\}$ laatikkoihin $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \ldots, \{2007, 2008\}$, ts. $m, n \in \{0, \ldots, 2008\}$ kuuluvat samaan laatikkoon täsmälleen silloin, kun $\lfloor m/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor$. Tällaisia laatikkoja on kaikkiaan $\lceil 2009/3 \rceil = 670$. Koska $1341 > 2 \cdot 670 = 1340$, johonkin laatikoista tulee kolme alkiota, ts. kolme peräkkäistä kokonaislukua. □