Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

29. 10. 2009

Perussarja

P1. Olkoon vadelmien hinta v €, herukoiden h € ja mustikoiden m € rasialta. Oletukset voidaan tällöin kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} 2v + 2h + m = 8 \\ v + 3h + m = 7{,}5 \\ 2v \qquad + 3m = 7, \end{cases}$$

mistä laskemmalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $5v + 5h + 5m = 22{,}5 \iff v + h + m = 4{,}5$. Tämä yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön yhdistämällä saadaan $m = 2(v + h + m) - (2v + 2h + m) = 2 \cdot 4{,}5 - 8 = 1$, joten viimeisestä yhtälöstä seuraa $2v = 7 - 3m = 7 - 3 = 4 \iff v = 2$. Keskimmäisestä yhtälöstä saadaan nyt ratkaistuksi $3h = 7{,}5 - (v + m) = 7{,}5 - (2 + 1) = 4{,}5 \iff h = 1{,}5$. Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan siis

$$\begin{cases} v = 2 \\ h = 1{,}5 \\ m = 1. \end{cases}$$

(Sijoittamalla on helppo tarkastaa, että kyseessä on todella ratkaisu.) Siis $3v+2h+3m = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}5 + 1 = 10$ eli *3 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 3 rasiaa mustikoita maksoi 10 €.*

P2. Ruudukon lukujen summa on

$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136,$$

joten kunkin vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on 34. Tästä seuraa, että ensimmäisen sarakkeen alimman ruudun luku on 14 ja kolmannen rivin oikeanpuolimmaisen ruudun luku on 15.

4			
9			**8**
7	**2**	**10**	15
14			

Oikeanpuolimmaisen sarakkeen tyhjien ruutujen lukujen summa on $11 = 1+10 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6$. Koska 10, 2, 8 ja 4 jo esiintyvät ruudukossa, viimeiseen sarakkeeseen on kirjoitettava 5 ja 6. Jos 5 on ylimmällä rivillä, niin ylimmän rivin keskimmäisten ruutujen lukujen summa on $25 = 16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12$. Vain 13 ja 12 ovat mahdollisia. Nyt 16 ei voi olla alimmälla rivillä, koska rivin lukujen summaksi tulisi ainakin 37, joten 16 on toisella rivillä; siis myös 1 on toisella rivillä. Koska kolmannen sarakkeen ylimmässä ruudussa on ainakin 12, 16 ei voi olla kolmannessa sarakkeessa. Sen on siis oltava toisessa, jolloin 1 on kolmannessa. Alimmalla rivillä ovat siis 3 ja 11. Nyt 12 ei voi olla toisessa sarakkeessa, koska muuten sarakkeen lukujen summa olisi pariton. 12 on siis kolmannessa sarakkeessa, 13 toisessa. Silloin alimman rivin toisessa ruudussa on 3 ja kolmannessa 11:

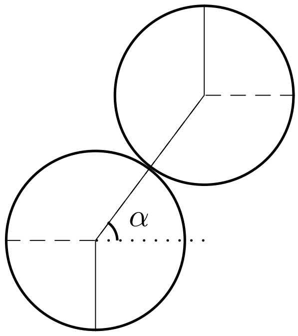
4	13	12	5
9	16	1	**8**
7	**2**	**10**	**15**
14	3	11	6

Oikeanpuolimmaisen sarakkeen ylimmässä ruudussa voi kuitenkin olla 6 ja alimmassa 5. Samalla tavoin kuin edellä päätellään nyt, että ylimmän rivin kahdessa keskimmäisessä ruudussa on 13 ja 11, että 16 on taas toisen rivin toisessa ruudussa ja 1 saman rivin kolmannessa, että alimmalla rivillä keskimmäisissä ruuduissa on oltava 3 ja 12, että 12 on kolmannessa sarakkeessa, jolloin ruudukko on oltava

4	13	11	6
9	16	1	**8**
7	**2**	**10**	**15**
14	3	12	5

Ruudukko voidaan siis täyttää tasan kahdella eri tavalla.

P3. Laatikon pohjalla olevat kiekot voi aina siirtää kiinni toisiinsa, joten riittää tarkastella asetelmia, joissa kiekot sivuavat toisiansa. Oletetaan, että kiekkojen keskipisteiden välinen yhdysjana muodostaa kulman α laatikon toisen sivun kanssa. Jos koordinaattiakselit valitaan laatikoiden sivujen mukaan, kuva on mahdollista peilausta lukuun ottamatta seuraavanlainen.



Piirretyn yhtenäisen murtoviivan korkeus (suurimman ja pienimmän y-koordinaatin erotus) on $2r + 2r\sin\alpha$. Vastaavasti katkoviivalla piirretyn murtoviivan leveys on $2r + 2r\cos\alpha$. Asetelman saa sijoitettua laatikkoon, jonka sivu on $s = \max\{2r + 2r\sin\alpha, 2r + 2r\cos\alpha\}$. Pienin mahdollinen arvo saavutetaan, kun $\alpha = \pi/4$, jolloin $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$ ja *pienin mahdollinen laatikon sivu on* $s = 2r + 2r\cdot\sqrt{2}/2 = (2+\sqrt{2})r$.

P4. On ratkaistava yhtälö $x^2 - y^2 = 2009$ eli $(x-y)(x+y) = 2009$, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Jaetaan luku 2009 tekijöihin. Kun kokeillaan pieniä tekijäkandidaatteja, huomataan, että $2009 = 7\cdot 287 = 7\cdot(7\cdot 41) = 7^2\cdot 41$. Eri tavat esittää 2009 pienemmän ja suuremman kokonaisluvun tulona ovat siis $2009 = 1\cdot 2009 = 7\cdot 287 = 41\cdot 49$. Koska $x - y < x + y$, tehtävän ratkaisut ovat yhtälöparien

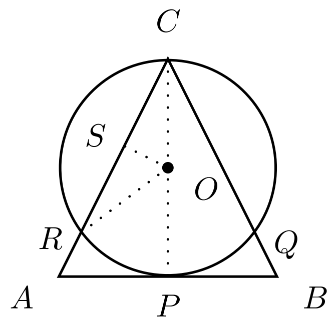
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2009, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=287 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x-y=41 \\ x+y=49 \end{cases}$$

ratkaisut $x = 1005$, $y = 1004$; $x = 147$, $y = 140$ ja $x = 45$, $y = 4$.

Välisarja

V1. Ks. **P2.**

V2. Olkoon r tehtävän ympyrän säde, jolloin tasakylkisen kolmion korkeus ja kanta ovat $2r$. Nimetään tasakylkisen kolmion kärjet niin, että AB on kanta ja C huippu. Kolmion ABC kyljen pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $\sqrt{(2r)^2 + r^2} = r\sqrt{5}$. Olkoon O ympyrän keskipiste, ja P, Q ja R pisteet, joissa ympyrä kohtaa sivut AB, BC ja AC. Olkoon edelleen S tasakylkisen kolmion COR kannan vastaisen korkeusjanan päätepiste kannalla.



Suorakulmaiset kolmiot APC ja OSC ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen terävä kulma. Siis $|CR| = 2|CS| = 2 \cdot r \cdot 2/\sqrt{5} = 4r\sqrt{5}/5$ ja ympyrä jakaa leikkaamansa sivut eli kolmion kyljet suhteessa

$$(r\sqrt{5} - 4r\sqrt{5}/5) : (4r\sqrt{5}/5) = (1 - 4/5) : (4/5) = 1 : 4.$$

V3. Valitaan tarkasteltavaksi yksi pelaajista, A. Todennäköisyys, että A voittaa täsmälleen kaksi peleistään on $\binom{4}{2}/2^4 = 6/16 = 3/8$. Oletetaan, että A voittaa pelaajat H_0 ja H_1 sekä häviää pelaajille V_0 ja V_1. Voidaan edelleen olettaa, että V_0 voittaa V_1:n ja H_0 H_1:n. Tällöin V_0 on hävittävä pelinsä H_0:lle ja H_1:lle, jotta hän voittaisi vain kaksi peliä. Vastaavasti H_1:n on voitettava V_1, jotta hän voittaisi vaaditut kaksi peliä. Lopuksi havaitaan, että V_1:n on voitettava H_0. Todennäköisyys, että nämä neljä peliä päättyvät näin, on $1/2^4 = 1/16$. *Kysytty todennäköisyys on siis*

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{128}.$$

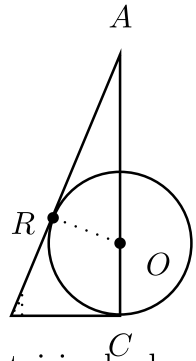
V4. On ratkaistava yhtälö $x^3 - y^3 = 2009$ eli $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2009$, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Jaetaan luku 2009 tekijöihin. Kun kokeillaan pieniä tekijäkandidaatteja, huomataan, että $2009 = 7 \cdot 287 = 7 \cdot (7 \cdot 41) = 7^2 \cdot 41$. Koska $x - y < x \le x^2 < x^2 + xy + y^2$ ja $x^2 + xy + y^2 > 0$, tehtävän ratkaisut ovat yhtälöparien

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 2009, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 287 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x - y = 41 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

ratkaisut. Yhtälöpareista ensimmäinen palautuu yhtälöksi $x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 2009$ eli $3x^2 - 3x = 2008$. Koska 2008 ei ole jaollinen 3:lla, yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisuja. Toinen yhtälöpari palautuu yhtälöksi $x^2 + x(x - 7) + (x - 7)^2 = 287$ eli $3x^2 - 21x + 7^2 = 7 \cdot 41$. Tästä seuraa, että $3x^2$ on jaollinen 7:llä, joka on mahdollista vain, jos x on jaollinen 7:llä. Mutta nyt yhtälön vasen puoli on jaollinen 49:llä, mutta oikea ei. Yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua. Kolmas yhtälöpari ei voi toteutua, koska $x > 41$ ja $x^2 + xy + y^2 > 41^2 > 1600$. *Lukua 2009 ei voi lausua kahden kuutioluvun erotuksena.*

Avoin sarja

A1. Kateettien pituudet ovat siis $a = 10$ ja $b = 24$ sekä hypotenuusan $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{676} = 26$. Olkoon r kysytty ympyrän säde. Nimetään kolmion sivut niin, että AB on hypotenuusa ja BC lyhyempi kateetti. Olkoon R tehtävän ympyrän ja kolmion sivuamispiste.



Kolmiot ABC ja AOR ovat yhdenmuotoisia, koska ne ovat molemmat suorakulmaisia ja niillä on yhteinen terävä kulma. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan ratkaistua *ympyrän säde r:*

$$\frac{r}{b-r} = \frac{a}{c} \iff cr = (b-r)a \iff (a+c)r = ab \iff r = \frac{ab}{a+c} = \frac{240}{36} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

A2. Olkoot kolmion sivujen pituudet a, qa ja q^2a. Olkoon $q \geq 1$. Kolmion pisin sivu q^2a on lyhempi kuin kahden muun summa: $q^2a < a + qa$. q toteuttaa siis epäyhtälön $q^2 - q - 1 < 0$. Epäyhtälössä on yhtälö, kun

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

joten epäyhtälö toteutuu, kun $2 \leq 2q < 1 + \sqrt{5}$. Jos $q < 1$, kolmion lyhin sivu q^2a on suurempi kuin pisimmän ja toiseksi pisimmän sivun erotus: $q^2a > a - qa$. q toteuttaa siis epäyhtälön $q^2 + q - 1 > 0$. Tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, kun

$$q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

joten epäyhtälö toteutuu, kun $-1 + \sqrt{5} < 2q < 2$.

A3. Ks. **P4**.

A4. Olkoot suomalaiset $s_0, \ldots, s_9$ ja ruotsalaiset $r_0, \ldots, r_9$. Suomalainen s_i soittakoon ruotsalaisille r_i, r_j ja r_k, missä $i, j, k \in \{0, \ldots, 9\}$, $j \equiv i + 1 \pmod{10}$ ja $k \equiv i + 3 \pmod{10}$. Tällöin jokainen soittaa kolme puhelua ja kaikkiaan kertyy 30 puhelua. Olkoot r_m ja r_n mitkä tahansa kaksi ruotsalaista. Voidaan olettaa, että $n - m$ on 1, 2, 3, 4 tai 5 modulo 10. Jos $n - m \equiv 2 \pmod{10}$ tai $n - m \equiv 5 \pmod{10}$, niin mikään suomalaisista ei soita sekä r_m:lle että r_n:lle. Jos taas $n - m \equiv 1 \pmod{10}$ tai $n - m \equiv 4 \pmod{10}$, niin s_n on se yksikäsitteinen suomalainen, joka soittaa sekä r_m:lle että r_n:lle. Lopuksi tapauksessa $n - m \equiv 3 \pmod{10}$ on myös yksikäsitteinen suomalainen s_i, joka soittaa tarkasteltaville ruotsalaisille, nimittäin se, jolle $m \equiv i + 1 \pmod{10}$ ja $n \equiv i + 4 \pmod{10}$. Missään tapauksista ei ole olemassa kahta suomalaista, jotka soittaisivat kummallekin näistä ruotsalaisista. Siis ehto 2 on voimassa. $\square$