Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

2. 11. 2010

Kuusi ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta. Monivalintatehtävien vastauksia varten on erillinen lomakkeensa. Tehtävät 7 ja 8 ovat perinteisiä tehtäviä, joiden ratkaisut kirjoitetaan omille papereilleen. Aikaa 120 minuuttia.

1. Jos kolmion sivuista kahden pituudet ovat 3 ja 4, niin kolmion alalle A voi olla voimassa:

a) $A < 1$	b) $A = 3$	c) $A = 6$	d) $A > 7$

2. Polynomin $x^4 - 1$ voi kirjoittaa tulona

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$	b) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
c) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$	d) $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$

3. Suoran ympyrälieriön pohjan säde on r ja korkeus h. Lieriön tilavuus on 1 ja kokonaispinta-ala 12. Tällöin $1/r + 1/h$ on

a) 1	b) 3	c) 4	d) 12

4. Yhtä suurempi kokonaisluku on *alkuluku*, jos sillä ei ole muita positiivisia tekijöitä kuin yksi ja luku itse. Määritä pienin alkuluku p, jolle $2010 \cdot p$ on kokonaisluvun neliö.

a) 3	b) 5
c) jokin muu	d) sellaista lukua ei ole

5. Kolmannen asteen kokonaiskertoimisella polynomiyhtälöllä voi olla

a) 0	b) 1	c) 2	d) 3 ratkaisua

6. Kuinka monta eri arvoa lauseke

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$$

saa, kun nollasta eroavat reaaliluvut x, y ja z vaihtelevat?

a) enintään 3	b) ainakin 3, mutta enintään 6
c) yli 6, mutta äärellisen monta	d) äärettömän monta

7. Suorakulmaisen särmiön tahkojen pinta-alat ovat 6, 8 ja 12 pinta-alayksikköä. Laske särmiön tilavuus.

8. Nelinumeroisessa luvussa numeroiden summa on 16, kolmas numero on kahden edellisen summa ja toinen numero kaksi kertaa niin suuri kuin neljäs. Kun numerot kirjoitetaan päinvastaiseen järjestykseen, muodostuu luku, joka on luvun 729 verran alkuperäistä lukua pienempi. Mikä on alkuperäinen luku?

2. 11. 2010

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Laskuaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________

Koulu : ______________________

Kotiosoite : ______________________

Sähköposti : ______________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

2. 11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

2010

1. Matti ja Kerkko päättävät maalata aidan. Matti olisi maalannut sen yksinään 3 tunnissa ja Kerkko 4 tunnissa. He alkavat maalata aitaa yhdessä klo 12:00. Eräässä vaiheessa pojat joutuvat kuitenkin erimielisyyksiin homman hoitamisessa ja kinastelevat 10 minuutin ajan, jolloin homma ei edisty ja kaiken lisäksi Kerkko suuttuu ja häipyy työmaalta. Matti jatkaa homman yksinään loppuun ja saa työn valmiiksi klo 14:25. Mihin kellonaikaan kina alkoi?

2. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Osoita, että kolmion ala on ab.

3. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle luku $2664n$ on kokonaisluvun neliö.

4. Luvut muodostavat Fibonacci-tyyppisen jonon, jos jonon kukin luku on aina kahden edellisen luvun summa. Laske tällaisen jonon viides luku, jos kymmenes luku on 322 ja jonon jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja.

Työskentelyaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2. 11.

2010

1. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Osoita, että kolmion ala on ab.

2. a, b ja c ovat kokonaislukuja, $0 < a < b < c$. Lukujen a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} ja $\frac{1}{4}$ keskiarvo on $\frac{5}{16}$. Määritä a, b ja c.

3. Olkoon x terävä kulma, jolle pätee: $\sin x$, $\sin(2x)$ ja $\sin(4x)$ muodostavat kasvavan aritmeettisen jonon. Laske tarkka arvo lausekkeelle $\cos^3 x - \cos x$.

4. Ratsu sijaitsee äärettömän shakkilaudan origossa. Kun shakkiruudun leveys valitaan yksiköksi, koordinaatisto voidaan kiinnittää niin, että ruutujen keskipisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja, ja ruutujen välisiä etäisyyksiä voidaan mitata keskipisteestä keskipisteeseen. Tunnetusti shakkiratsu liikkuu yhdellä siirrolla lähtöruudusta mihin tahansa etäisyydellä $\sqrt{5}$ olevaan ruutuun. Mikä on pienin määrä siirtoja, joilla se pääsee origosta ruutuun, joka on etäisyydellä $\sqrt{281}$?

Työskentelyaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

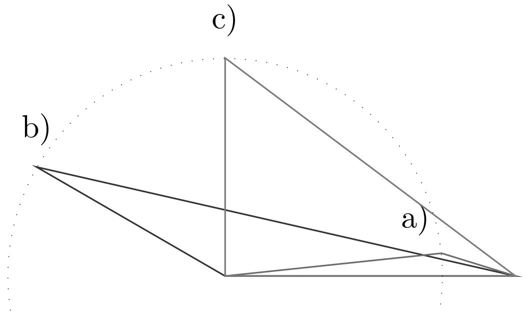
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

28. 10. 2010

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	+	+	+	−
2.	+	+	+	+
3.	−	−	−	−
4.	−	−	−	+
5.	−	+	+	+
6.	+	+	−	−

P1. Valitaan kannaksi sivu, jonka pituus on 4. Koska toinen jäljelle jäävistä sivuista on pituudeltaan 3 ja toista ei tunneta, korkeudelle pätee $0 < h \leq 3$ ja kaikki nämä arvot ovat mahdollisia. Siis $0 < A = 4h/2 = 2h \leq 6$ ja ala saa eri tilanteissa kaikki nämä arvot. Kohdat a, b ja c ovat siis oikein ja d väärin, vastaavat esimerkit ovat kuvassa.



P2. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$, joten kaikki kohdat ovat oikein.

P3. Lieriön tilavuus on $\pi r^2 h = 1$ ja kokonaispinta-ala $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12$, joten

$$\frac{12}{1} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{\pi r^2 h} = \frac{2}{h} + \frac{2}{r},$$

mistä seuraa $1/r + 1/h = 6$. Siis mikään vaihtoehdoista ei ole oikein.

P4. Luku $2010 \cdot 2 = 4020$ ei ole kokonaisluvun neliö, sillä $63^2 = 3969 < 4020 < 64^2 = 4096$. Jos p on pariton alkuluku, niin $2010p = 2 \cdot 1005 \cdot p$ on parillinen, mutta ei jaollinen neljällä, koska $1005p$ on pariton. Siis $2010p$ ei silloinkaan ole kokonaisluvun neliö. Kohta d on siis oikein.

P5. Paritonta astetta olevalla polynomiyhtälöllä tunnetusti on ratkaisuja, joten a on väärin. Muut kohdat ovat mahdollisia, esimerkiksi yhtälöllä $x^3 = 0 \iff x = 0$ on yksi, yhtälöllä $x^3 - x^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$ kaksi ja yhtälöllä $x^3 - x = 0 \iff x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$ kolme ratkaisua.

P6. Merkitään $s = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$. Huomataan, että

$$\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{jos } x > 0 \\ -1 & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Siis lausekkeen

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$$

arvo voi olla -3, -1, 1 tai 3 sen mukaan, mitä lukujen x, y ja z etumerkit ovat. Toisaalta

$$\frac{xyz}{|xyz|} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \frac{z}{|z|}.$$

Jos siis $x, y, z > 0$, niin $s = 1+1+1+1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, jos $x, y, z < 0$, niin $s = -1+-1+-1+-1 = -4$. Jos täsmälleen kaksi luvuista x, y ja z on positiivisia, niin $s = 1+1 \cdot 1 \cdot -1 = 0$. Jos täsmälleen yksi on positiivinen, niin samoin $s = -1+1 \cdot -1 \cdot -1 = 0$. Siis mahdollisia arvoja on kolme, joten kohdat a ja b ovat oikein, c ja d vääriä.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Olkoot särmien pituudet a, b ja c. Suorakulmaisessa särmiössä tahkojen pinta-alat ovat tällöin ab, ac ja bc ja tilavuus $V = abc$. Siis

$$V^2 = (abc)^2 = (ab)(ac)(bc) = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576 = 24^2,$$

joten $V = 24$.

P8. Olkoon nelinumeroinen luku $1000a+100b+10c+d$, jossa a, b, c ja d ovat numeroita. Tiedetään, että

$$\begin{cases} a + b + c + d = 16 \\ c = a + b \\ b = 2d \\ (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 729. \end{cases}$$

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$16 = a + b + c + d = a + 2d + (a + 2d) + d = 2a + 5d.$$

Erityisesti $5d \leq 16$, joten $d \leq 3$. Kuitenkin jos d on pariton, myös $2a + 5d$ on, mutta numeroiden summa 16 on parillinen. Siis $d = 0$ tai $d = 2$. Edellisessä tapauksessa saadaan $a = \frac{1}{2}(16 - 5d) = 8$, $b = 2d = 0$, $c = a + b = 8 + 0 = 8$ ja $d = 0$, mutta $8080 - 0808 = 7272 \neq 729$, joten neljäs ehto ei toteudu. Jälkimmäisessä tapauksessa $a = \frac{1}{2}(16-5d) = \frac{16-10}{2} = 3$, $b = 2d = 4$, $c = a+b = 7$ ja $d = 2$. Koska $3472-2743 = 729$, viimeinen ehto toteutuu. *Siis alkuperäinen luku on* 3472.

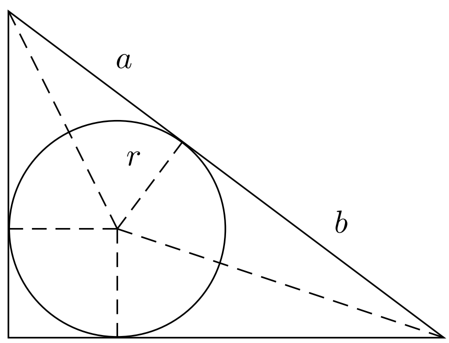
Huomautus: Neljän toisistaan riippumattoman lineaarisen yhtälön ryhmän voi tietenkin ratkaista myös tavanomaisin menetelmin käyttämättä oletusta tuntemattomien kokonaisuudesta.

Välisarja

V1. Matti maalasi aitaa klo 12:00:sta klo 14:25:een lukuun ottamatta 10 min keskeytystä, siis 2h 15min. Koska $\dfrac{2\text{h}\,15\text{min}}{3\text{h}} = \dfrac{135}{180} = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$, niin Matti teki työstä 3/4:aa ja Kerkko 1/4:n. Siis Kerkon työskentelyaika oli $\frac{1}{4} \cdot 4\text{h} = 1\text{h}$ ja *kina alkio klo 13:00.*

V2. Väite: Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Tällöin kolmion ala on ab.

Todistus: Merkitään kolmion sisäänpiirretyn ympyrän sädettä r:llä. Sisäänpiirretyn ympyrän sivujen vastaiset säteet ja terävien kulmien kulmanpuolittajat jakavat kolmion viiteen osaan: yhteen neliöön, jonka sivu on r, kahteen suoraakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat a ja r (näillä on yhteinen hypotenuusa ja kateetti r) sekä kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat b ja r.



Siis alkuperäisen kolmion ala on

$$A = r^2 + 2 \cdot \frac{ar}{2} + 2 \cdot \frac{br}{2} = r^2 + ar + br.$$

Ala voidaan laskea myös toisin, sillä kolmion kateetit ovat $a + r$ ja $b + r$, josta

$$A = \frac{1}{2}(a + r)(b + r) = \frac{1}{2}(r^2 + ar + br + ab).$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan eliminoitua tuntematon r:

$$A = 2A - A = r^2 + ar + br + ab - (r^2 + ar + br) = ab. \quad \square$$

Huomautus: Jatkamalla tästä saadaan helposti todistus Pythagoraan lauseelle:

$$\begin{aligned}
&(a + r)^2 + (b + r)^2 \\
&= a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2(r^2 + ar + br) \\
&= a^2 + b^2 + 2A = a^2 + b^2 + 2ab \\
&= (a + b)^2.
\end{aligned}$$

Kääntäen tehtävän väitteen voi todistaa käyttämällä Pythagoraan lausetta ensimmäisen alan kaavan sijasta.

V3. Koska $2+6+6+4 = 18 = 2 \cdot 9$ on jaollinen yhdeksällä, myös 2664 on. Kehitetään alkutekijähajotelma:

$$2664 = 9 \cdot 296 = 9 \cdot 8 \cdot 37 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 37.$$

Tässä 37 on alkuluku, sillä $2 \nmid 37$, $3 \nmid 37$, $5 \nmid 37$ ja $7^2 = 49 > 37$. Jos $2664n$ on kokonaisluvun neliö, niin sen alkutekijähajotelmassa kaikkien alkulukujen eksponentit ovat parillisia. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että luvun n alkutekijähajotelmassa alkulukujen eksponentit ovat parillisia, paitsi että lukujen 2 ja 37 eksponentit ovat parittomia. Koska pienimmät eksponentit ovat 0 ja 1, *pienin n, jolla tämän saa toteutettua, on $n = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 37^1 = 2 \cdot 37 = 74$.*

V4. Merkitään jonon n:ttä jäsentä a_n:llä, $x = a_5$, $y = a_6$ ja katsotaan, minkä algebrallisen muodon oletukset saavat. Fibonacci-ehdosta seuraa $a_7 = a_5 + a_6 = x + y$, $a_8 = a_6 + a_7 = y + (x + y) = x + 2y$, $a_9 = a_7 + a_8 = (x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y$ ja $a_{10} = a_8 + a_9 = (x + 2y) + (2x + 3y) = 3x + 5y$. Siis

$$322 = a_{10} = 3x + 5y. \tag{1}$$

Toisaalta $a_4 = a_6 - a_5 = y - x$, $a_3 = a_5 - a_4 = x - (y - x) = 2x - y$, $a_2 = a_4 - a_3 = (y - x) - (2x - y) = 2y - 3x$ ja $a_1 = a_3 - a_2 = 2x - y - (2y - 3x) = 5x - 3y$. Positiivisuusehdosta saadaan siten $5x - 3y > 0$ ja $2y - 3x > 0$, joista yhdistämällä

$$\frac{3}{2}x < y < \frac{5}{3}x. \tag{2}$$

Yhtälöstä (1) ja epäyhtälöstä (2) seuraa

$$\begin{aligned}
&3x + 5 \cdot \frac{3}{2}x < 3x + 5y = 322 < 3x + 5 \cdot \frac{5}{3}x \\
\Rightarrow &\frac{21}{2}x < 322 < \frac{34}{3}x \\
\Rightarrow &28 < \frac{966}{34} < x < \frac{644}{21} < 31,
\end{aligned}$$

sillä x on positiivinen. Tällä on vain kaksi kokonaista ratkaisua, nimittäin $x = 29$ ja $x = 30$. Jälkimmäinen tapaus ei voi toteutua, sillä jos pätisi $x = 30$, niin $5 \mid 3x + 5y = 322$, mikä on ristiriita. Siis $x = 29$, jolloin $y = \frac{1}{5}(322 - 3x) = 47$. Jonon jäsenten kokonaisuus on nyt selvää ja positiivisuus helposti tarkastettavissa: $a_4 = 47 - 29 = 18$, $a_3 = 29 - 18 = 11$, $a_2 = 18 - 11$ ja $a_1 = 11 - 7 = 4$. *Siis jonon viides jäsen on 29.*

Avoin sarja

A1. Ks. V2.

A2. Tehtävän ehdosta saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + 4^{-1}}{4} = \frac{5}{16} \\
\iff &a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
\iff &a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Koska $0 < a < b < c$, niin $1 = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < a^{-1} + a^{-1} + a^{-1} = 3a^{-1}$, joten $a < 3$. Toisaalta $1 = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} > a^{-1}$, joten $a > 1$. Ainoa kokonainen ratkaisu on $a = 2$. Jäljelle jääville tuntemattomille saadaan yhtälö

$$2^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1 \iff b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{2}.$$

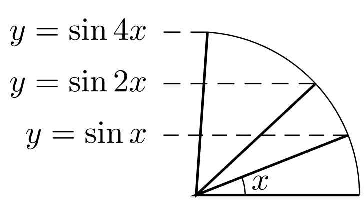
Koska $2 < b < c$, niin $\frac{1}{2} = b^{-1} + c^{-1} < 2b^{-1}$, joten saadaan $b < 4$. Ainoa kokonainen mahdollisuus on $b = 3$ ja luvun c ratkaisemiseksi saadaan yhtälö

$$3^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{2} \iff c^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \iff c = 6.$$

Siis $a = 2$, $b = 3$ ja $c = 6$.

A3. Koska $\sin x$, $\sin 2x$ ja $\sin 4x$ muodostavat aritmeettisen jonon, niin kaksinkertaisen kulman sinin ja kosinin kaavoja toistuvasti käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
& \sin 4x - \sin 2x = \sin 2x - \sin x \\
\iff\ & \sin 4x - 2\sin 2x = -\sin x \\
\iff\ & 2\sin 2x\cos 2x - 2\sin 2x = -\sin x \\
\iff\ & 2\sin 2x(\cos 2x - 1) = -\sin x \\
\iff\ & 4\sin x\cos x(\cos 2x - 1) = -\sin x \\
\iff\ & \cos x(\cos 2x - 1) = -\frac{1}{4} \qquad (\sin x \neq 0,\ \text{koska } x \text{ on terävä}) \\
\iff\ & \cos x(2\cos^2 x - 2) = -\frac{1}{4} \\
\iff\ & \cos^3 x - \cos x = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$



A4. Ratsun pitää siis siirtyä mahdollisimman vähillä siirroilla origosta $(0,0)$ ruutuun (x,y), jolle $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{281}$ eli yksinkertaisemmin $x^2+y^2 = 281$. Koska

$$\frac{\sqrt{281}}{\sqrt{5}} = \sqrt{56{,}2} > \sqrt{49} = 7,$$

tarvitaan enemmän kuin 7 siirtoa. Toisaalta luvun 281 parittomuudesta seuraa, että toinen koordinaateista x ja y on pariton, toinen parillinen. Koska $5 = 2^2 + 1^2$, niin koordinaattien summa vaihtuu ratsun siirrossa parillisesta parittomaksi tai toisin päin. Siksi origosta etäisyydelle $\sqrt{281}$ tarvitaan pariton määrä siirtoja, ts. vähintään 9.

Etsitään toisaalta sopiva ruutu, jolle $x^2 + y^2 = 281$ ja johon pääsee 9 siirrolla. Koska $16^2 + 5^2 = 281$, voidaan valita $(x,y) = (16,5)$. Siihen pääsee reittiä

$$\begin{gathered}
(0,0) \to (2,1) \to (4,2) \to (6,3) \to (8,4) \to (10,5) \\
\to (12,6) \to (14,5) \to (15,7) \to (16,5)
\end{gathered}$$

pitkin. Siis *9:llä ratsun siirrolla pääsee origosta ruutuun, joka on etäisyydellä* $\sqrt{281}$ *lähtöruudusta.*