Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

13. 11. 2012

1. Timantti on lohjennut kahdeksi palaksi, joiden massojen suhde on 3 : 4. Kokonaisen timantin arvo on suoraan verrannollinen massan neliöön. Lohjenneen timantin arvo on siis alkuperäisestä arvosta

a) alle puolet
b) vähentynyt alle 50%
c) noin 51%
d) noin 49%

2. Erään koulun oppilaista neljä viidesosaa oli hunneja ja loput olivat vandaaleja. Käytöshäiriöiden vuoksi koulusta jouduttiin erottamaan kaksi kolmasosaa hunneista, mutta yhtään vandaalia ei tarvinnut erottaa. Kuinka suuri osuus kouluun jääneistä oppilaista on vandaaleja?

a) 1/3
b) 3/8
c) 3/7
d) 1/2

3. Mitkä seuraavista vertailuista ovat tosia?

a) $2^{2^2} > 3^3$
b) $3^{3^3} \geq 5^5$
c) $(-4)^{-4} < (-5)^{(-5)}$
d) $((-2)^2)^{((-2)^2)} = 4^4$

4. Luku $\dfrac{2^{2013} + 2^{2011}}{2^{2012} - 2^{2010}}$ on

a) 2
b) $\dfrac{10}{3}$
c) $2^{2012} + 1$
d) $\dfrac{2^{13} + 2^{11}}{2^{12} - 2^{10}}$

5. Puolipallolla ja suoralla kartiolla on sama pohja ja niiden vaipat ovat pinta-alaltaan yhtä suuret. Olkoon V_{pp} puolipallon tilavuus ja V_{k} kartion tilavuus. Tällöin

a) $V_{\mathrm{pp}} > V_{\mathrm{k}}$
b) $V_{\mathrm{pp}} < V_{\mathrm{k}}$
c) $V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{pp}} = \sqrt{3}/2$
d) $V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{pp}} = 3/\sqrt{2}$

6. Useista pikkukuutioista, joiden särmien pituudet ovat 1, 2 ja 3, kasataan suuri kuutio, jonka särmän pituus on 5 (ja joka ei ole sisältä ontto). Tällöin:

a) Kaikkia pikkukuutiotyyppejä ei välttämättä tarvita kasaamisessa.
b) Pikkukuutioita tarvitaan vähintään 50 suuren kuution rakentamiseen.
c) Suuren kuution pinnasta ei voi välttämättä päätellä, onko kasaamisessa käytetty pikkukuutioita vähemmän vai enemmän kuin 100.
d) Käytettyjen pikkukuutioiden yhteispinta-ala on pariton kokonaisluku.

7. Kahden ympyrän säteet ovat $\sqrt{3}$ ja 1 sekä keskipisteiden välinen etäisyys 2. Laske ympyröiden leikkausalueen pinta-ala.

8. Olkoon f toisen asteen polynomi, jolla on kokonaislukukertoimet. Lisäksi $f(k)$ on viidellä jaollinen, kun k on kokonaisluku. Osoita, että kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

13. 11. 2012

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

13. 11. 2012

1. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät kaikilla terävillä kulmilla α?

a) $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha = 1$ b) $\sin\alpha \le \alpha$
c) $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha \ge 1$ d) $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$

2. Suurin kokonaisluku, jolla eräät kaksi positiivista kokonaislukua ovat molemmat jaollisia on 4, ja 24 on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen molemmilla luvuilla. Lukujen summa voi olla

a) 20 b) 24 c) 28 d) 36

3. Useista pikkukuutioista, joiden särmien pituudet ovat 1, 2 ja 3, kasataan suuri kuutio, jonka särmän pituus on 5 (ja joka ei ole sisältä ontto). Tällöin:

a) Kaikkia pikkukuutiotyyppejä ei välttämättä tarvita kasaamisessa.
b) Pikkukuutioita tarvitaan vähintään 50 suuren kuution rakentamiseen.
c) Suuren kuution pinnasta ei voi välttämättä päätellä, onko kasaamisessa käytetty pikkukuutioita vähemmän vai enemmän kuin 100.
d) Käytettyjen pikkukuutioiden yhteispinta-ala on pariton kokonaisluku.

4. Olkoon f toisen asteen polynomi, jolla on kokonaislukukertoimet. Lisäksi $f(k)$ on viidellä jaollinen, kun k on kokonaisluku. Osoita, että kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

5. Ympyrän halkaisijan AB jatkeelta pisteestä C (ympyrän ulkopuolelta) piirretään ympyrälle tangentti, joka sivuaa ympyrää pisteessä N. Kulman $\sphericalangle ACN$ puolittaja leikkaa janan AN pisteessä P ja janan NB pisteessä Q. Osoita, että $|PN| = |NQ|$.

6. Mikä on suurin n, jolla seuraava on mahdollista: $n \times n$-ruudukon jokainen ruutu voidaan värittää punaiseksi tai siniseksi niin, että jos valitaan mitkä tahansa kaksi ruuturiviä ja mitkä tahansa kaksi ruutusaraketta, niin näiden risteyskohdissa olevat neljä ruutua eivät ole kaikki samanvärisiä?

13. 12. 2012

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

13. 11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2012

1. Määritellään reaalilukujen laskutoimitus $*$ seuraavasti: $a*b = a^2+b^2-ab$. Ratkaise yhtälö

$$(x * x) * 1 = x * (x * 1).$$

2. Olli ja Liisa pelaavat seuraavaa peliä 2012:lla pelimerkillä, jotka ovat yhdessä läjässä. He ottavat vuorotellen läjästä yhden, kaksi tai kolme pelimerkkiä. Viimeisen pelimerkin saanut voittaa. Liisa aloittaa. Selvitä, voiko jompikumpi pelaaja aina varmistaa voiton itselleen.

3. Viekas hallitsija lupaa puolet valtakunnastaan seuraavanlaista työpanosta vastaan: Jokaista shakkipelin 64 ruutua kohti työntekijän pitää työskennellä tietty määrä kokonaisia päiviä. Ensimmäisen ruudun kohdalla työ kestää tasan päivän, ja kunkin seuraavan ruudun kohdalla työpäivien määrä kaksinkertaistuu edelliseen ruutuun verrattuna. Minä viikonpäivänä työ loppuu, kun työ alkaa eräänä maanantaina ja jatkuu joka päivä ilman viikonloppuvapaitakaan?

4. Terävän kulman $\sphericalangle A$ puolittajalta valitaan piste P ja toiselta kyljeltä piste B. BP:n jatke leikkaa toisen kyljen pisteessä C Osoita, että lausekkeen

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

arvo ei riipu pisteen B valinnasta, kun P pidetään paikallaan.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

13. 11. 2012

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

1. En diamant har spruckit till två bitar. Förhållandet mellan bitarnas massor är 3 : 4. Värdet av en hel diamant är direkt proportionellt mot kvadraten på massan. Värdet av den spruckna diamanten

a) är mindre än hälften av	b) har minskat till under 50 % av
c) är ca 51 % av	d) är ca 49% av

värdet av den ursprungliga diamanten.

2. Av eleverna i en skola var fyra femtedelar hunner och resten vandaler. På grund av beteendestörningar var man tvungen att avskeda två tredjedelar av hunnerna. Ingen av vandalerna behövde dock avskedas. Hur stor var andelen vandaler av antalet elever som fick stanna kvar i skolan?

a) $1/3$	b) $3/8$	c) $3/7$	d) $1/2$

3. Vilka av följande jämförelser är sanna?

a) $2^{2^2} > 3^3$	b) $3^{3^3} \geq 5^5$
c) $(-4)^{-4} < (-5)^{(-5)}$	d) $((-2)^2)^{((-2)^2)} = 4^4$

4. Talet $\dfrac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2012}-2^{2010}}$ är lika med

a) 2	b) $\dfrac{10}{3}$	c) $2^{2012}+1$	d) $\dfrac{2^{13}+2^{11}}{2^{12}-2^{10}}$

5. Ett halvklot och en rak kon har samma basyta och deras mantelytor är lika stora. Låt V_{hk} vara volymen av halvklotet och V_{k} volymen av konen. Då är

a) $V_{\mathrm{hk}} > V_{\mathrm{k}}$	b) $V_{\mathrm{hk}} < V_{\mathrm{k}}$	c) $V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{hk}} = \sqrt{3}/2$	d) $V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{hk}} = 3/\sqrt{2}$

6. Man bygger en stor kub (som inte är ihålig) med kantlängden 5 av flera mindre kuber vars kantlängder är 1, 2 och 3. Då gäller:

a) För konstruktionen behöver man inte nödvändigtvis alla typer av de mindre kuberna.
b) Man behöver minst 50 av de mindre kuberna för att bygga den stora kuben.
c) Genom att betrakta ytan av den stora kuben kan man inte nödvändigtvis dra slutsatsen av om man har använt sig av färre eller flera än 100 mindre kuber.
d) Den totala arean av de använda mindre kuberna utgör ett udda heltal.

7. Radierna i två cirklar är $\sqrt{3}$ och 1 medan avståndet mellan medelpunkterna är 2. Beräkna arean av det skärningsfigurområde som cirklarna bildar.

8. Låt f vara ett andragradspolynom med heltalskoefficienter. Låt ytterligare $f(k)$ vara delbart med fem då k är ett heltal. Visa att alla koefficienter i polynomet f är delbara med fem.

13. 11.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

2012

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

13. 11.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

2012

1. Vilka av följande påståenden är sanna för alla spetsiga vinklar α?

a) $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha = 1$	b) $\sin\alpha \leq \alpha$
c) $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha \geq 1$	d) $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$

2. Det största heltal som två positiva heltal båda är delbara med är 4. Talet 24 är igen det minsta positiva heltal som är delbart med de båda talen. Summan av talen kan vara

a) 20	b) 24	c) 28	d) 36

3. Man bygger en stor kub (som inte är ihålig) med kantlängden 5 av flera mindre kuber vars kantlängder är 1, 2 och 3. Då gäller:

a) För konstruktionen behöver man inte nödvändigtvis alla typer av de mindre kuberna.
b) Man behöver minst 50 av de mindre kuberna för att bygga den stora kuben.
c) Genom att betrakta ytan av den stora kuben kan man inte nödvändigtvis dra slutsatsen av om man har använt sig av färre eller flera än 100 mindre kuber.
d) Den totala arean av de använda mindre kuberna utgör ett udda heltal.

4. Låt f vara ett andragradspolynom med heltalskoefficienter. Låt ytterligare $f(k)$ vara delbart med fem då k är ett heltal. Visa att alla koefficienter i polynomet f är delbara med fem.

5. I en cirkel ritar man från punkten C på förlängningen av diametern AB en tangent till cirkeln som tangerar cirkeln i punkten N. Bisektrisen till vinkeln $\sphericalangle ACN$ skär sträckan AN i punkten P och sträckan NB i punkten Q. Visa att $|PN| = |NQ|$.

6. Vilket är det största värdet på n för vilket följande är möjligt: varje ruta i ett $n \times n$ rutfält kan färgas röd eller blå, så att om man väljer vilka som helst två rutrader och vilka som helst två rutkolumner, så har de fyra rutor som utgör skärningsställena för dessa rader och kolumner inte alla samma färg?

13. 11.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2012

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4 - 6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

13. 11.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens öppna serie

2012

1. Räkneoperationen $*$ för reella tal definieras på följande sätt: $a * b = a^2 + b^2 - ab$. Lös ekvationen

$$(x * x) * 1 = x * (x * 1).$$

2. Olli och Liisa spelar följande spel med 2012 spelbrickor som finns i en enda hög. De tar turvis upp en, två eller tre spelbrickor ur högen. Den som tagit upp den sista spelbrickan vinner spelet. Liisa börjar spelet. Ta reda på huruvida någon av spelarna alltid kan säkra vinsten åt sig själv.

3. En slug regent lovar hälften av sitt rike mot följande arbetsinsats: För varje av ett schackbrädes 64 rutor bör arbetstagaren arbeta ett visst antal hela dagar. På den första rutan tar arbetet exakt en dag. På alla de övriga rutorna gäller att antalet arbetsdagar alltid fördubblas jämfört med föregående ruta. Vilken veckodag tar arbetet slut då det börjar på en måndag och fortlöper varje dag till och med utan veckoslutsledighet?

4. Man väljer en punkt P på bisektrisen till den spetsiga vinkeln $\sphericalangle A$ och sedan en punkt B på denna vinkels ena vinkelben. Förlängningen av BP skär det andra vinkelbenet i punkten C. Visa att värdet av uttrycket

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

inte beror av valet av punkten B om P hålls på samma ställe.

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

13. 11. 2012

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$-$	$+$	$-$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$-$
6.	$+$	$+$	$+$	$-$

P1. Koska massojen suhteet (alkuperäinen timantti mukaan lukien) ovat $3:4:7$, niin arvojen suhteet ovat $9:16:49$. Siis lohjenneen timantin arvo on siis alkuperäisestä arvosta

$$\frac{9+16}{49}\cdot 100\% \approx 51\%.$$

P2. Jos hunneja on aluksi $4t$ ja vandaaleja t, niin erottamisien jälkeen vandaalien osuus on

$$\frac{t}{\frac{1}{3}4t+t}=\frac{3}{7}.$$

P3. a) $2^{2^2}=2^4=16<27=3^3$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

b) $3^{3^3}=3^{27}>3^{2\cdot 13}=9^{13}>5^5$, joten vastaava vertailu pitää paikkansa.

c) $(-4)^{-4}>0>(-5)^{(-5)}$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

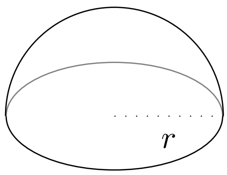
d) $(-2)^2=4$, joten $((-2)^2)^{((-2)^2)}=4^4$ pitää paikkansa.

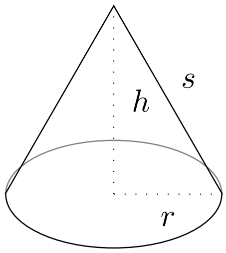
P4.

$$\frac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2012}-2^{2010}}=\frac{2^{13}+2^{11}}{2^{12}-2^{10}}=\frac{2^{3}+2^{1}}{2^{2}-2^{0}}=\frac{8+2}{4-1}=\frac{10}{3},$$

joten kohdat b ja d ovat oikein, kohdat a ja c ovat selvästi eri suuria kuin nämä.

P5.





Puolipallon vaipan ala on $\frac{1}{2}4\pi r^2 = 2\pi r^2$ ja kartion vaipan ala on πrs, missä r on yhteisen pohjaympyrän säteen ja s on kartion sivusärmän pituus. Koska vaippojen alat ovat yhtä suuret, niin $2\pi r^2 = \pi rs$ eli $s = 2r$. Toisaalta kartio on suora, joten Pythagoraan lauseesta seuraa

$$r^2+h^2=s^2=(2r)^2=4r^2 \Rightarrow h^2=3r^2 \Rightarrow h=r\sqrt{3}.$$

Siis tilavuudet ovat

$$V_{\mathrm{pp}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$$

ja

$$V_{\mathrm{k}}=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}=\frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$$

ja näiden suhde on

$$V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{pp}}=\frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}:\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1,$$

joten kohdat c ja a ovat oikein sekä muut vääriä.

P6. a) Totta, suuren kuution voi kasata pelkästään yksikkökuutioista.

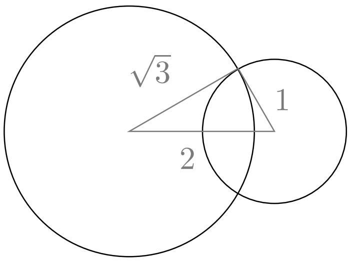
b) Totta: Sijoitetaan suuri kuutio koordinaatistoon niin, että särmät ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipiste origossa. Tällöin jokainen kasaamisessa käytetty pikkukuutio, jonka särmän pituus on vähintään kaksi, sisältää ainakin yhden pisteistä $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Siis tällaisia kuutioita käytetään kasaamisessa korkeintaan 8. Lisäksi näistä pikkukuutioista korkeintaan yhden särmän pituus on 3, sillä $3+3>5$, joten tällaisten pikkukuutioiden yhteistilavuus on korkeintaan $3^3+7\cdot 2^3=27+56=83$. Yksikkökuutioita tarvitaan siis vähintään $5^3-83=125-83=42$ kappaletta, ja pikkukuutioita kaikkiaan vähintään $8+42=50$ kappaletta (mitä pienempiä pikkukuutiot ovat, niin sitä enemmän niitä tietenkin tarvitaan).

c) Totta: Oletetaan, että suuren kuution pinta on kasattu kokonaan yksikkökuutioista. Tällöin ei voi siis tietää, onko suuren kuution ytimessä pikkukuutio, jonka sivun pituus on 3, vai esimerkiksi pelkkiö yksikkökuutioita. Edellisessä tapauksessa tarvitaan $5^3 - 3^3 + 1 = 99$, jälkimmäisessä tapauksessa $5^3 = 125$ pikkukuutiota.

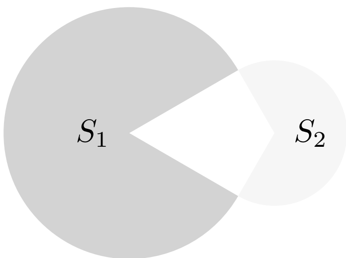
d) Ei pidä paikkaansa, sillä jokaisen pikkukuution ala on parillinen kokonaisluku $6 \cdot s^2$, missä s on kokonaisluku. Siis yhteispinta-alakin on parillinen kokonaisluku.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Koska ympyröiden säteet ovat $\sqrt{3}$ ja 1 sekä keskipisteiden etäisyys 2, niin Pythagoraan käänteislauseesta seuraa, että säteet muodostavat keskipisteiden yhdysjanan kanssa suorakulmaisen kolmion, sillä $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$.



Lisäksi kulmat ovat 30°, 60° ja 90°, sillä pienimmän kateetin ja hypotenuusan suhde on 1 : 2. Ympyröiden peittämästä alueesta voi siis ottaa pois kaksi tällaista suorakulmaista kolmiota,



jolloin jäljelle jää kaksi isoa sektoria, joiden alat ovat

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{5\pi}{6} \cdot 3 = \frac{5\pi}{2}$$

ja

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 1^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Ko. suorakulmaisen kolmion ala puolestaan on $\Delta = \sqrt{3}/2$, joten ympyröiden peittämä ala on kaikkiaan

$$S_1 + S_2 + 2\Delta = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} = 3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}.$$

Toisaalta ympyröiden pinta-alojen summa on $\pi(\sqrt{3})^2 + \pi \cdot 1^2 = 4\pi$. Leikkausalueen pinta-ala on näiden erotus eli

$$4\pi - 3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3} = \frac{5}{6} - \sqrt{3}.$$

P8. Merkitään $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Koska $f(n)$ on viidellä jaollinen, kun n on kokonaisluku, niin erityisesti $f(0) = c$, $f(1) = a1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ ja $f(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$ ovat viidellä jaollisia, mistä seuraa $5 \mid c$, $5 \mid f(1) + f(-1) = a + b + c + a - b + c = 2a + 2c$ ja $5 \mid f(1) - f(-1) = a + b + c - (a - b + c) = 2b$. Koska kokonaisluvuilla 2 ja 5 ei ole yhteisiä tekijöitä, niin edelleen $5 \mid b$ ja $5 \mid (a + c) - c = a$. Siis kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	+	+
2.	+	−	+	−
3.	+	+	+	−

V1. Kun $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, niin $\tan\alpha > 1$, joten $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha \geq \tan^2\alpha > 1$ (siis a epätosi). $\sin\alpha \leq \alpha$ pitää paikkansa (b tosi), sillä α on yksikköympyrän kulmaa α vastaavan kaaren pituus, kun taas $\sin\alpha$ on tämän kaaren kohtisuora projektio y-akselille. Koska $0 < \cos\alpha < 1$, niin $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha \geq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (c tosi). Kohta d seuraa suoraan tangentin määritelmästä $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ ja siitä, että $\cos\alpha \neq 0$, kun α on terävä kulma.

V2. Jos luvut ovat a ja b, niin $a = 4x$, $b = 4y$ eikä x:llä ja y:llä ole yhteisiä tekijöitä. Toisaalta $24 = at = bu$, eikä t:llä ja u:lla ole yhteisiä tekijöitä. Ei siis voi olla $x = y$. Oletetaan, että $x < y$; silloin $a < b$ ja $u < t$. Koska $6 = xt = yu$, x ja y ovat joukossa $\{1, 2, 3, 6\}$ ja x joukossa $\{1, 2\}$. Jos $x = 1$, on $t = 6$, joten $u = 1$. Luvut $a = 4$, $b = 24$ toteuttavat ehdon; summa on 28. Jos $x = 2$, $t = 3$, joten $u = 2$, $y = 3$. ($u = 1$, $y = 6$ ei käy, koska silloin x ja y olisivat kahdella jaollisia.) $a = 8$, $b = 12$ on kelvollinen pari; summa on 20.

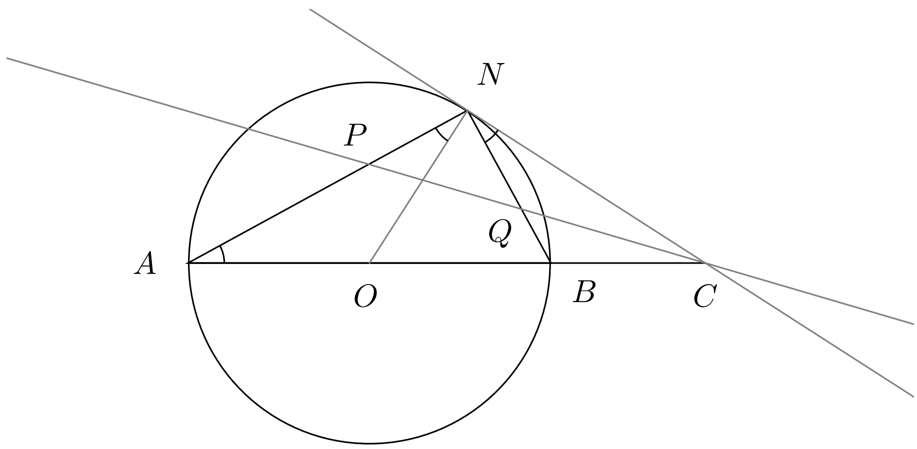
V3=P6.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P8.

V5. Olkoon $\alpha = \sphericalangle NAB$ ja O ympyrän keskipiste. Koska $\triangle AON$ on tasakylkinen (molemmat kyljet ovat ympyrän säteitä), niin myös $\sphericalangle ANO = \alpha$. Toisaalta $\sphericalangle ANB$ ja $\sphericalangle ONC$ ovat suoria kulmia, edellinen halkaisijaa AB vastaavana kehäkulmana ja jälkimmäinen siksi, että NC on ympyrän tangentti ja ON säde. Siis

$$\sphericalangle BNC = \sphericalangle ANC - \sphericalangle ANB = \sphericalangle ANC - \sphericalangle ONC = \sphericalangle ANO = \alpha.$$



Merkitään $\beta = \sphericalangle ACN$. Koska suora CP puolittaa kulman β, niin

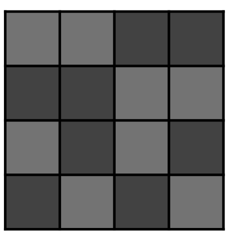
$$\sphericalangle APC = \pi - \sphericalangle CAP - \sphericalangle ACP = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2}.$$

Tämän komplementtikulmalle saadaan siis $\sphericalangle NPQ = \alpha + \beta/2$. Toisaalta

$$\sphericalangle NQC = \pi - \sphericalangle QNC - \sphericalangle QCN = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2},$$

joten myös $\sphericalangle NQP = \alpha + \beta/2$. Siis $\triangle NPQ$ on tasakylkinen (ja huippu on N), joten $|PN| = |NQ|$. $\square$

V6. Jos $n = 4$, esimerkiksi seuraava väritys on vaatimusten mukainen:



Jos $n = 5$, niin jossain rivissä, esimerkiksi ylimmässä, on ainakin kolme samanväristä, esimerkiksi punaista. Näiden punaisten sarakkeissa ei millään muulla rivillä saisi olla kahta punaista. Joka rivillä on siis ainakin kaksi sinistä. Nämä kaksi sinistä voivat olla kolmessa eri asemassa (mahdollinen kolmas, punainen, ruutu voi olla kolmessa aasemassa), joten ainakin kahdella rivillä ne ovat samoissa sarakkeissa. 5×5-ruudukko ei voi toteuttaa ehtoa, ei myöskään $n \times n$-ruudukko, jos $n > 5$.

Avoin sarja

A1.

$$\begin{aligned}
& (x * x) * 1 = x * (x * 1) \\
\iff & (x^2 + x^2 - x \cdot x) * 1 = x * (x^2 + 1^2 - x \cdot 1) \\
\iff & (x^2) * 1 = x * (x^2 - x + 1) \\
\iff & (x^2)^2 + 1^2 - x^2 \cdot 1 = x^2 + (x^2 - x + 1)^2 - x \cdot (x^2 - x + 1) \\
\iff & x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x + 1 - x) \cdot (x^2 - x + 1) \\
\iff & (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x + 1) \\
\iff & (x - 1)^2 (x + 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x + 1) \\
\iff & (x - 1)^2 = 0 \lor (x + 1)^2 = x^2 - x + 1 \\
\iff & x = 1 \lor x^2 + 2x + 1 = x^2 - x + 1 \\
\iff & x = 1 \lor 3x = 0 \\
\iff & x = 0 \lor x = 1
\end{aligned}$$

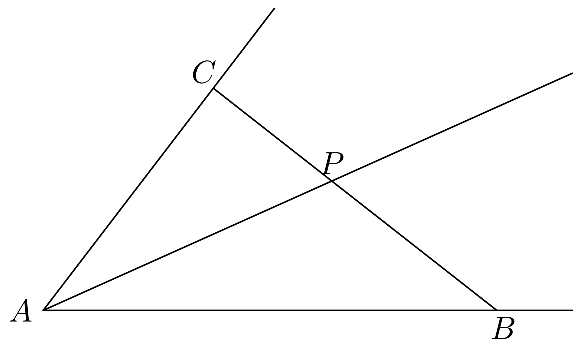
A2. Jos pelaajalla on edessään 3, 2 tai 1 merkkiä, hän voittaa. Jos vastustajalla on edessään 4 pelimerkkiä, niin hänen siirtonsa jälkeen laudalla on 1, 2 tai 3 merkkiä jne. – Pelaaja, joka voi pakottaa vastustajansa tilanteeseen, jossa tällä on edessään neljällä jaollinen määrä merkkejä, voittaa. Koska 2012 on 4:llä jaollinen, Olli voittaa.

A3. Kolmeen peräkkäiseen kuluvat työmäärä on

$$2^i + 2^{i+1} + 2^{i+2} = 2^i(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^i,$$

missä i on kokonaisluku, siis 2^i kokonaista viikkoa. Ensimmäistä ruutua vastaava työ tulee tehtyä ensimmäisenä maanantaina, ja loput $64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$ ruutua voi ryhmitellä kolmea peräkkäistä ruutua vastaaviksi työrupeamiksi, jotka kestävät kokonaisia viikkoja. Siis *työ päättyy maanantaina.*

A4.



Kun $\triangle ABC$:n pinta-ala lasketaan kahdella eri tavalla (toisaalta suoraan ja toisaalta jakamalla $\triangle ABP$:ksi ja $\triangle APC$:ksi), saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin 2\alpha &= \frac{1}{2}|AP|\,|AC|\sin\alpha + \frac{1}{2}|AB|\,|AP|\sin\alpha \\ \iff \frac{1}{|AP|}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.\end{aligned}$$

Koska kulma α ja $|AP|$ ovat vakioita, niin myös yhtälön vasen puoli pysyy vakiona. $\square$