12. 11. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut 2013

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$-$	$+$
2.	$-$	$+$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$+$	$-$
4.	$-$	$-$	$+$	$+$
5.	$+$	$+$	$-$	$-$
6.	$-$	$-$	$-$	$-$

P1. Tiedetään, että neliöjuuret $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{7}$ ovat irrationaalilukuja (tämä seuraa aritmetiikan peruslauseesta ja siitä, että 2 ja 7 ovat alkulukuja), mutta 1,414213562373 ja 2,6457513110645 ovat rationaalisia. Siis kohdat a ja c ovat väärin. Kohdassa b luvut eivät ole yhtä suuria, koska $\sqrt{5-2\sqrt{6}} > 0$ ja $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$. Sen sijaan pätee $\sqrt{7}+\sqrt{2} > 0$ ja $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{14} + 2 = 9 + 2\sqrt{14}$, joten d on oikein.

P2. Olkoon ilmapallon säde ennen täyttöä r ja täytön jälkeen R, jolloin

$$\frac{R^3 - r^3}{r^3} = 237{,}5\% = 2\frac{3}{8} \;\Rightarrow\; \frac{R}{r}^3 = \frac{R^3}{r^3} = 3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \frac{R^2}{r^2} = \frac{R}{r}^2 = \frac{3}{2}^2 = \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{4\pi R^2 - 4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 125\%.$$

Ilmapallon pinta-ala kasvaa siis 125%, joka on korkeintaan 175% (ehdot b ja d), mutta ehdot a ja c ovat väärin.

P3. Koska lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on M, niiden summa on nM. Kun a poistetaan, jäljelle jäävien summa on $nM - a$ ja keskiarvo

$$\frac{nM - a}{n - 1} \neq \frac{M - a}{n - 1},$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta a väärin). Tämä on alkuperäistä pienempi, esimerkiksi jos luvut ovat 1, 2 ja 3, joista 3 poistetaan (kohta b oikein). Uuden ja vanhan keskiarvon erotus on

$$\frac{nM - a}{n - 1} - M = \frac{nM - a - (n-1)M}{n - 1} = \frac{M - a}{n - 1},$$

joten c on oikein. Uuden ja vanhan keskiarvon keskiarvo on

$$\frac{1}{2}\left(\frac{nM - a}{n - 1} + M\right) = \frac{nM - a + (n-1)M}{2(n-1)} = \frac{(2n-1)M - a}{2(n-1)} \neq \frac{nM - a}{2(n-1)},$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta d väärin).

P4. Laventamalla saadaan toisaalta

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a + \frac{b}{c}} + \frac{a + c}{a - \frac{b}{c}} &= \frac{c^2}{ac + b} + \frac{ac + c^2}{ac - b} \\
&= \frac{c^2(ac - b) + (ac + c^2)(ac + b)}{(ac + b)(ac - b)} \\
&= \frac{ac^3 - bc^2 + ac(ac + b) + ac^3 + bc^2}{a^2c^2 - b^2} \\
&= \frac{2ac^3 + ac(ac + b)}{a^2c^2 - b^2} = \frac{ac(2c^2 + ac + b)}{a^2c^2 - b^2},
\end{aligned}$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a + \frac{b}{c}} + \frac{a + c}{a - \frac{b}{c}} &= \frac{c^2}{ac + b} + \frac{ac + c^2}{ac - b} \\
&= \frac{ac}{ac - b} + \frac{c^2}{ac + b} + \frac{c^2}{ac - b} \\
&= \frac{ac}{ac - b} + \frac{c^2(ac - b + ac + b)}{(ac - b)(ac + b)} \\
&= \frac{ac}{ac - b} + \frac{2ac^3}{(ac - b)(ac + b)}.
\end{aligned}$$

Kohdat c ja d ovat siis oikein. Kun $a = 2$ ja $b = c = 1$, niin lausekkeen arvoksi saadaan

$$\frac{c}{a + \frac{b}{c}} + \frac{a + c}{a - \frac{b}{c}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} + \frac{2 + 1}{2 - \frac{1}{1}} = \frac{1}{2 + 1} + \frac{3}{2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{3}{1} = 3\frac{1}{3} \neq 0,$$

mutta

$$\frac{c(2bc + a^2c + ab)}{b^2 - a^2c^2} = \frac{1(2 \cdot 1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1)}{1^2 - 2^2 \cdot 1^2} = \frac{2 + 4 + 2}{1 - 4} = \frac{8}{-3} < 0.$$

Siis a ja b eivät tule kysymykseen.

P5. Tunnetun kolmosen jaollisuussäännön mukaan mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle m pätee $3 \mid m \iff 3 \mid S(m)$. Erityisesti kohta a on voimassa. Kohdan d ehto ei sen sijaan pidä paikkansa, pienin vastaesimerkki on $n = 2$: $7 \nmid S(14) = 5$.

Olkoon luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ kymmenjärjestelmäesitys $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$, jolloin

$$S(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

Olkoon vastaavasti luvun $2n$ kymmenjärjestelmäesitys $2n = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot 10^i$ (esityksissä voidaan käyttää samaa yhtä monta numeroa, jos n:n esitys aloitetaan nollalla). Huomataan heti, että numero b_i määräytyy numerosta a_i ja mahdollisesta edeltävästä numerosta a_{i-1} niin, että $b_i \equiv 2a_i \pmod{10}$, ellei $i > 0$ ja $a_i \geq 5$, jolloin $b_i \equiv 2a_i + 1 \pmod{10}$. Luvun $2n$ numeroiden summa määräytyy siis luvun n numeroista niin, että kukin numeroista tuplataan ja $S(2n)$:ään vaikuttaa tästä tuplasta ykkösosa ja mahdollinen muistinumero. Merkitään

$$\delta(a) = \begin{cases} 2a, & \text{kun } a \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 2a - 10 + 1 = 2a - 9, & \text{kun } a \in \{5, 6, 7, 8, 9\}. \end{cases}$$

Edellinen tarkastelu osoittaa tällöin, että

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} b_i = \sum_{i=0}^{k} \delta(a_i).$$

Koska kaikilla $i \in \{0, \ldots, k\}$ pätee $\delta(a_i) \leq 2a_i$, saadaan

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} \delta(a_i) \leq \sum_{i=0}^{k} 2a_i = 2S(n),$$

mikä on kohdan b arvio. Kohtaan c $n = 5$ on vastaesimerkki, nimittäin $S(10) = 1 < \frac{1}{2}S(5) = 2\frac{1}{2}$.

P6. Yhtälöparin voi ratkaista:

$$\begin{cases} \dfrac{8^x}{2^{x+y}} = 64 \\ \dfrac{9^{x+y}}{3^{4y}} = 243 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2^{3x}}{2^{x+y}} = 64 \\ \dfrac{3^{2(x+y)}}{3^{4y}} = 243 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2^{3x-(x+y)} = 2^6 \\ 3^{2(x+y)-4y} = 3^5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - (x+y) = 6 \\ 2(x+y) - 4y = 5 \end{cases} \qquad (x \mapsto a^x \text{ aidosti kasvava, kun } a > 1)$$

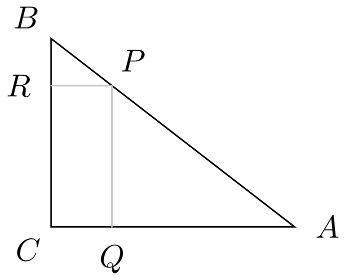
$$\iff \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = (2x-y) - (2x-2y) = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = (2x-y) + y = 6 + 1 = 7 \\ y = 1 \end{cases},$$

josta seuraa $2xy = 7 \cdot 1 = 7$, joka on pariton positiivinen kokonaisluku (kohdat c ja d oikein, muut väärin.)

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Merkitään $c = |AB|$, $a = |BC|$ ja $b = |AC|$. Piirretään kuva, jossa on tehtävän suorakulmaisen kolmion ABC ja pisteen P lisäksi pisteen P kohtisuorat projektiot Q ja R kateeteille AC ja BC.



Kolmiot CAB, RPB ja QAP ovat tietenkin yhdenmuotoisia, koska ne ovat kaikki suorakulmaisia ja niissä on pareittain yhteinen terävä kulma. Oletuksesta $|PB| : |PC| : |PA| = 1 : 2 : 3$ seuraa $|PB| : |AB| = 1 : 4$ ja $|AP| : |AB| = 3 : 4$, joten yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$|RP| = |CQ| = \frac{1}{4}b \text{ ja } |PQ| = \frac{3}{4}a.$$

Huomataan myös, että kolmoissuhteesta seuraa $|PC| = \frac{2}{1+3}c = c/2$. Soveltamalla Pythagoraan lausetta kahdesti, suorakulmaisiin kolmioihin ABC ja CQP saadaan

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ (b/4)^2 + (3a/4)^2 = (c/2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 9a^2 + b^2 = 4c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a^2 = 3c^2 \\ 5a^2 - 3b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8}a = \sqrt{3}c \\ \sqrt{5}a = \sqrt{3}b \end{cases} \Rightarrow a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{5} : \sqrt{8}.$$

P8. Kun $x, y, z \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^2 = 3(xy+xz+yz) \\
\iff &x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = 3xy+3xz+3yz \\
\iff &x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz \\
\iff &2x^2+2y^2+2z^2 = 2xy+2xz+2yz \\
\iff &x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz-z^2 = 0 \\
\iff &(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 0 \\
\iff &x-y = x-z = y-z = 0 \qquad (t^2 \geq 0, \text{kun } t \in \mathbb{R}) \\
\iff &x = y = z. \quad \square
\end{aligned}$$

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	+	−
2.	+	+	−	−
3.	+	−	−	−

V1=P3.

V2=P5.

V3. Oletuksen mukaan yhtälön ratkaisut ovat $u-d$, u ja $u+d$ joillakin luvuilla u ja $d \neq 0$. Sijoittamalla juuret takaisin yhtälöön saadaan siis

$$\begin{cases} (u-d)^3+3a(u-d)^2+b(u-d)+c=0 \\ u^3+3au^2+bu+c=0 \\ (u+d)^3+3a(u+d)^2+b(u+d)+c=0. \end{cases}$$

Laskemalla kaksi ensimmäistä yhtälöä puolittain yhteen ja käyttämällä sievennyksessä keskimmäistä hyväksi saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= (u-d)^3+3a(u-d)^2+b(u-d)+c+(u+d)^3+3a(u+d)^2+b(u+d)+c \\
&= u^3-3u^2d+3ud^2-d^3+u^3+3u^2d+3ud^2+d^3 \\
&\qquad +3a(u^2-2ud+d^2+u^2+2du+d^2)+b(u-d+u+d)+2c \\
&= 2u^3+6ud^2+3a(2u^2+2d^2)+b\cdot 2u+2c \\
&= 2(u^3+3au^2+bu+c)+6ud^2+3a(2d^2) \\
&= 2\cdot 0+6ud^2+3a(2d^2) = 6ud^2+6ad^2 = 6d^2(u+a).
\end{aligned}$$

Koska $d \neq 0$, niin yhtälöstä $6d^2(u+a) = 0$ seuraa $u + a = 0$ eli $u = -a$. Siis

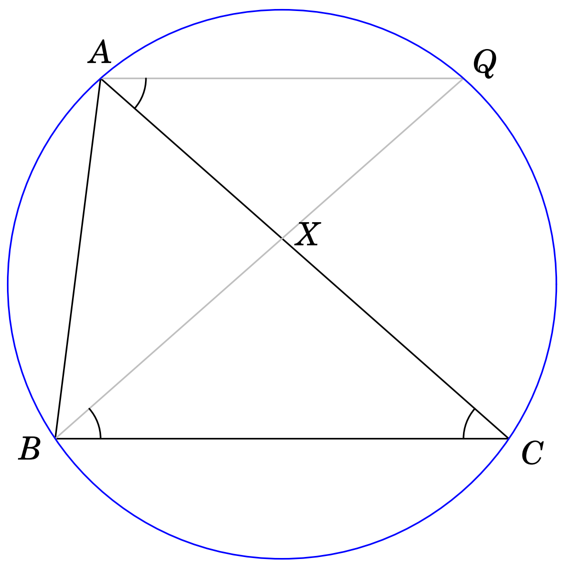
$$\begin{aligned} 0 &= u^3 + 3au^2 + bu + c = (-a)^3 + 3a(-a)^2 + b(-a) + c \\ &= -a^3 + 3a^3 - ab + c = 2a^3 - ab + c \end{aligned}$$

eli $ab = 2a^3 + c$ (kohdan a väittämä).

Kolmannen asteen juuriksi saadaan aritmeettisen kolmikon jäsenet 0, 1 ja 2, kun yhtälö on $(x-0)(x-1)(x-2) = 0$ eli $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Tässä tapauksessa $a = -1 \neq 0$, $b = 2$ ja $c = 0$. Huomataan, että $3a + c = -3 + 0 = -3 \neq 4 = 2b$ ja $b = 2 \neq 0 = 3ac$. Siis muut vaihtoehdot ovat vääriä.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4. Piirretään kuva tilanteesta.



Koska oletetaan, että $|BX| = |CX|$, niin kolmio BCX on tasakylkinen ja sen kantakulmat ovat yhtä suuret. Siis

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle XCB = \sphericalangle XBC = \sphericalangle QBC = \sphericalangle QAC,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret. Koska suora AC leikkaa suoria AQ ja BC niin, että $\sphericalangle ACB = \sphericalangle QAC$, niin $AQ \parallel BC$. Koska AP on kohtisuorassa sivua BC vastaan, niin se on kohtisuorassa myös janaa AQ vastaan, joten kehäkulma PAQ on suora. Kehäkulmaa vastaa keskuskulma on siis oikokulma, ts. PQ on ympyrän S halkaisija. $\square$

V5. Voidaan olettaa, että laudan keskipisteiden koordinaatit ovat muotoa (x, y), missä $x, y \in \mathbb{Z}$ ja $0 \leq x, y \leq 2012$, ja laudan ruutuihin viitataan näiden kautta.

Järjestetään ensin nappulat vasempaan alakulmaan: Tartutaan siihen nappulaan, jonka x-koordinaatti on pienin, ja jos näitä on useita, valitaan näistä se, jonka y-koordinaatti on pienin. Olkoon tämä nappula ruudussa (x_0, y_0); siirretään se origoon pitkin vapaata reittiä $(x_0, y_0) \to (x_0, 0) \to (0, 0)$, missä siirrot voivat olla surkastuneita, ts. voi olla $x_0 = 0$ tai $y_0 = 0$. Valitaan seuraavaksi lopuista nappuloista samoin koordinaateiltaan pienin. Olkoot sen koordinaatit (x_1, y_1); voidaan olettaa, että $x_1 \neq 0$, sillä tilanteen voi tietenkin tarvittaessa korjata muutamalla siirrolla. Siirretään se origossa olevan viereen: $(x_1, y_1) \to (x_1, 0) \to (1, 0)$, 2×2-pikkuneliö saadaan kasaan seuraavasti: Lopuista kahdesta nappuloista toinen siirretään joko reittiä $(x_2, y_2) \to (0, y_2) \to (0, 1)$ tai $(x_2, 0) \to (x_2, 2012) \to (0, 2012) \to (0, 1)$, toinen ensin oikeaan alakulmaan: $(x_3, y_3) \to (2012, y_3) \to (2012, 0)$. Asetelma saadaan nyt kasaan siirroilla $(1, 0) \to (1, 2012)$ ja $(2012, 0) \to (1, 0)$ ja $(1, 2012) \to (1, 1)$.

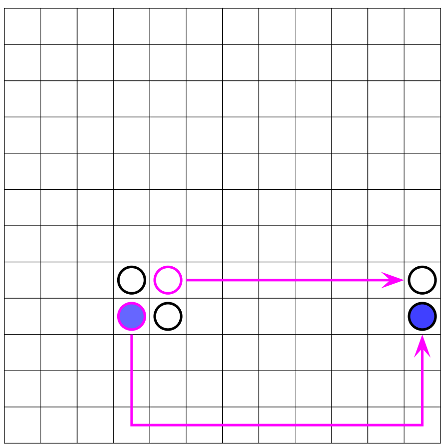
Vasemman alakulman nappuloita voi kiertää positiivisen kiertosuuntaan siirtosarjalla

$$
\begin{aligned}
&b\colon (1,0) \to (2012,0),\ a\colon (0,0) \to (2011,0) \to (2011,2012),\\
&d\colon (0,1) \to (0,0),\ c\colon (1,1) \to (0,1),\\
&b\colon (2012,0) \to (1,0) \to (1,2012),\ a\colon (2011,2012) \to (2011,0) \to (1,0) \text{ ja}\\
&b\colon (1,2012) \to (1,1),
\end{aligned}
$$

missä selvyyden vuoksi nappulat on nimetty kirjaimilla a, b, c ja d. Tässä perusasetelmassa siis sinisen nappulan voi olettaa olevan missä vain ruudussa neljästä ruudusta.

Osoitetaan, että tämä 2×2-asetelma voidaan siirtää aina yhden ruudun verran oikealle tai ylöspäin, jos vain laudan reuna ei tule vastaan. Oletetaan, että nappulat ovat ruuduissa $a\colon (x, y)$, $b\colon (x+1, y)$, $c\colon (x+1, y+1)$ ja $d\colon (x, y+1)$. Symmetrian vuoksi riittää tarkastella oikealle siirtämistä, jolloin oletetaan, että $x \geq 2010$. Oletetaan lisäksi, että $y > 0$ ja käsitellään $y = 0$ erikoistapauksena. Siirretään ensin nappulat a ja c pysäyttimiksi laudan reunaan (kuvan esimerkissä on tehtävän lautaa hieman pienempi lauta):

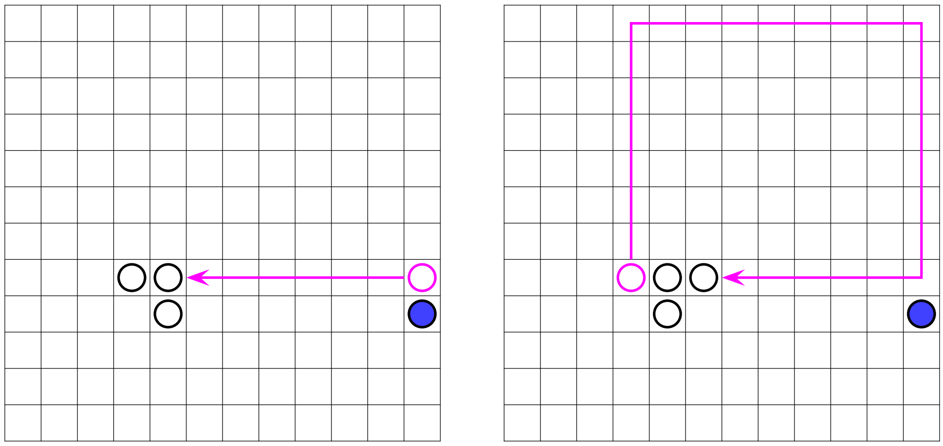
$$c\colon (x+1, y+1) \to (2012, y+1) \text{ ja } a\colon (x, y) \to (x, 0) \to (2012, 0) \to (2012, y).$$



Järjestellään ylärivi:

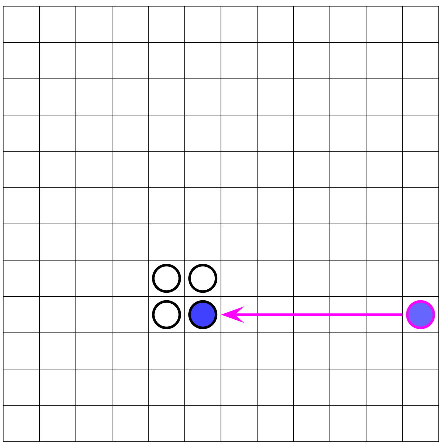
c: $(2012, y+1) \to (x+1, y+1)$,

d: $(x, y+1) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, y+1) \to (x+2, y+1)$,



jonka jälkeen asetelma saadaan kasaan:

a: $(2012, y) \to (x+1, y)$.



Erikoistapaus $y = 0$ on helppo, sillä silloin voidaan siirtää

d: $(x, 1) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, 0)$

a: $(x, 0) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, 1) \to (x+2, 1)$ ja

d: $(2012, 0) \to (x+2, 1)$.

Edellä todistetusta seuraa, että mikä tahansa laudan ruutu voi tulla nappulan valloittamaksi niin, että nappula on osa 2×2-asetelmaa. Koska sininen nappula voi perusasetelmassa olla mikä neljästä nappulasta tahansa, sininenkin nappula pääsee mihin hyvänsä ruuduista.

V6. Muokataan yhtälö Diofantoksen yhtälöksi kertomalla puolittain $12mn$:llä.

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12} &\iff 12n+48m=mn\\ &\iff mn-12n-48m+12\cdot 48=576\\ &\iff (m-12)(n-48)=576.\end{aligned}$$

Siis $n-48 \mid 576 = 9\cdot 64$, mutta koska n ja $n-48$ ovat parittomia, saadaan $n-48 \mid 9$ ja erityisesti $|n-48|\le 9$. Koska vastaavasti $|m-12|\ge 64$ ja $m>0$, niin täytyy olla $m-12>0$ ja $n-48>0$. Siis

$$\begin{aligned}(m-12)(n-48)=576 &\iff \begin{cases}n-48=1\\ m-12=576\end{cases} \vee \begin{cases}n-48=3\\ m-12=192\end{cases} \vee \begin{cases}n-48=9\\ m-12=64\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}m=588\\ n=49\end{cases} \vee \begin{cases}m=204\\ n=51\end{cases} \vee \begin{cases}m=76\\ n=57.\end{cases}\end{aligned}$$

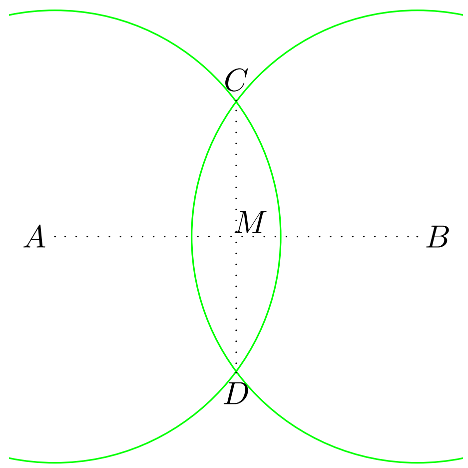
Avoin sarja

A1. Ks. **P6.**

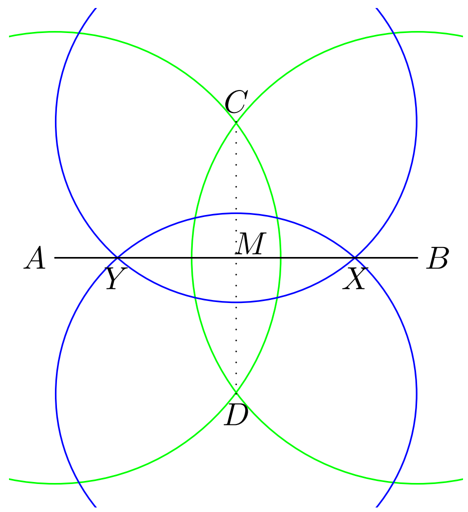
A2. Merkitään p:llä todennäköisyyttä, että satunnaisesti valitulla henkilöllä on ko. harvinainen sairaus, ja ε:llä testivirheen todennäköisyyttä, jolloin $p=10^{-6}$ ja $\varepsilon=(100-99)\%=0{,}01$. Kysytty ehdollinen todennäköisyys on

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{\text{testihenkilö on sairas} \mid \text{testitulos on positiivinen}\}\\ &=\frac{\mathbb{P}\{\text{testihenkilö on sairas ja testitulos on positiivinen}\}}{\mathbb{P}\{\text{testitulos on positiivinen}\}}\\ &=\frac{p(1-\varepsilon)}{p(1-\varepsilon)+(1-p)\varepsilon}=\frac{10^{-6}\cdot 0{,}99}{10^{-6}\cdot 0{,}99+(1-10^{-6})\cdot 0{,}01}\\ &=\frac{99}{99+10^6-1}=\frac{99}{1\,000\,098}\approx\frac{10^2}{10^6}=10^{-4}=0{,}0001.\end{aligned}$$

A3. Piirretään A- ja B-keskiset ympyrät, joiden säde on 10 cm. Olkoot näiden ympyröiden leikkauspisteet C ja D. (Kuvassa on katkoviivoilla osuudet, joita ei ole piirretty.)



Suora CD on tietenkin janan AB keskinormaali. Olkoon M janojen AB ja CD leikkauspiste. Tällöin $|AM| < |AC| = 10$ cm, koska AM on jana AC projektio suoralle AB. Samoin $|DM| = |CM| < |AC| = 10$ cm. Piirretään C- ja D-keskiset ympyrät, joiden säteeksi valitaan mikä tahansa r, jolle $|CM| < r < 10$ cm. Ympyröiden leikkauspisteet olkoot X ja Y, joista X on janalla AM. Piirretään lyhyen viivoittimen avulla jana, joka alkaa pisteestä A, kulkee pisteen X kautta ja on pituudeltaan 10 cm. Koska $|AM| < 10$ cm, tämä jana sisältää janan AM. Vastaavalla tavalla voidaan piirtää jana, joka sisältää janan MB ja sisältyy janaan AB. Nämä yhdessä muodostavat janan AB.



A4. Olkoon luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ kymmenjärjestelmäesitys $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$, jolloin

$$S(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

Tehtävän **P5.** ratkaisussa on osoitettu, että

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} \delta(a_i),$$

missä

$$\delta(a) = \begin{cases} 2a, & \text{kun } a \in \{0,1,2,3,4\} \\ 2a-9, & \text{kun } a \in \{5,6,7,8,9\}. \end{cases}$$

Kun $a \in \{5,6,7,8,9\}$, niin

$$1/5 = 2 - 9/5 \leq \delta(a)/a = (2a-9)/a = 2 - 9/a \leq 2 - 9/9 = 1,$$

joten kaikkiaan saadaan arviot

$$\frac{1}{5} \leq \frac{S(2n)}{S(n)} \leq 2.$$

Osoitetaan, että kaikki rationaaliluvut q, joille $1/5 \leq q \leq 2$, ovat mahdollisia suhteen $S(2n)/S(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, arvoja. Tarkastellaan kokonaislukuja

$$n = \underbrace{5 \cdots 5}_{v \text{ kpl}}\underbrace{1 \cdots 1}_{y \text{ kpl}},$$

missä $v, y \in \mathbb{N}$ ja $v+y > 0$. Tällöin $S(n) = 5v+y$ ja $S(2n) = \delta(5) \cdot v + \delta(1) \cdot y = 5v+2y$. Olkoon q rationaaliluku, jolle $1/5 \leq q \leq 2$. Kirjoitetaan $q = m/n$, missä $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Osoitetaan, että voidaan valita $v, y \in \mathbb{N}$, $v + y > 0$ niin, että

$$\begin{aligned} &\frac{S(2n)}{S(n)} = \frac{v+2y}{5v+y} = \frac{m}{n} \\ \iff &(v+2y)n = m(5v+y) \iff (n-5m)v = (m-2n)y. \end{aligned}$$

Valitaan nimittäin yksinkertaisesti $v = 2n - m$ ja $y = 5m - n$. Koska $m/n \leq 2$, niin $m \leq 2n$ ja $2n - m \geq 0$. Vastaavasti koska $m/n \geq 1/5$, niin $5m \geq n$ ja $5m - n \geq 0$. Ei voi olla $v = y = 0$, koska silloin olisi $2n - m = 0$ ja $5m - n = 0$, mistä seuraa $10m = 2n = m \Rightarrow m = n = 0$, mikä on mahdotonta. Siis $v + y > 0$ ja v ja y on onnistuttu valitsemaan niin, että $\frac{S(2n)}{S(n)} = q$.

Vastaus: Täsmälleen rationaaliluvut q, joille $1/5 \leq q \leq 2$.