11.11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

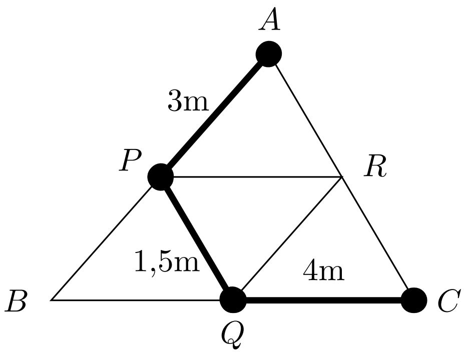
2014

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Juna kulkee Ankkalinnasta Hanhivaaraan. Matka-ajasta 5 % kuluu pysähdyksiin. Matka-aikaa halutaan lyhentää 10 %, mutta pysähdyksiin kuluvaa aikaa ei voida muuttaa. Junan nopeutta on tällöin lisättävä (”noin” tarkoittaa prosenttiyksikön tarkkuudella)

a) 10 %	b) alle 15 %	c) noin 12 %	d) noin 15 %

2. Metallitangosta valmistetaan kolmionmuotoinen kehikko ABC. Kehikkoa vahvistetaan yhdistämällä kolmion sivujen keskipisteet toisiinsa tangoilla. Oheiseen kuvaan, joka ei ehkä ole mittatarkka, on merkitty muutamia tankojen tai niiden osien pituuksia vahvennetuilla janoilla. Kuinka monta metriä tankoa rakennelmaan on käytetty?



a) ainakin 24 m	b) ainakin 25 m	c) ainakin 26 m	d) ainakin 27 m

3. Onko olemassa positiivisia reaalilukuja a ja b, joille on voimassa

a) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{ab}$	b) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab}$
c) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \sqrt{ab}$	d) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < \sqrt{ab}$

4. Tarkastellaan luonnollista lukua

$$\begin{aligned} N = {} & 97\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531 \\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531 \\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531, \end{aligned}$$

jossa esiintyvät parittomat numerot laskevassa järjestyksessä 25 kertaan sekä välissä nollat. Tämä luku N on jaollinen kokonaisluvulla

a) 9	b) 5	c) 3	d) 11

.

5. Suomessa lyödään 5, 10, 20 ja 50 sentin kolikkoja. Kuinka monella tavalla voi maksaa yhden euron laskun näitä kolikkoja käyttämällä?

a) alle 45:llä	b) alle 50:llä	c) 50:llä	d) yli 50:llä

6. Polynomin $(3x-1)^7$ voi purkaa muotoon

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Kuinka suuri on $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$?

a) pariton	b) negatiivinen	c) 129	d) 0

7. Laske r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion lävistäjien pituudet.

8. Olkoon n epänegatiivinen kokonaisluku. Kuinka monella tavalla henkilöt A, B ja C voivat keskenään jakaa n samanlaista karamellia?

11. 11. Perussarjan monivalinnan vastauslomake 2014

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

11.11. 2014

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

1. Tarkastellaan luonnollista lukua

$$N = 97\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\\ 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\\ 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531,$$

jossa esiintyvät parittomat numerot laskevassa järjestyksessä 25 kertaan sekä välissä nollat. Tämä luku N on jaollinen kokonaisluvulla

a) 9	b) 5	c) 3	d) 11

2. Suomessa lyödään 5, 10, 20 ja 50 sentin kolikkoja. Kuinka monella tavalla voi maksaa yhden euron laskun näitä kolikkoja käyttämällä?

a) alle 45:llä	b) alle 50:llä	c) 50:llä	d) yli 50:llä

3. Polynomin $(3x-1)^7$ voi purkaa muotoon

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Tällöin $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ on

a) pariton	b) negatiivinen	c) 129	d) 0

4. Laske r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 12-kulmion lävistäjien pituudet.

5. Oletetaan, että reaaliluvuille x ja y pätee $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Mitä arvoja $x+y$ voi saada?

6. Tomppelinnan kaupungissa noudatetaan palveluiden tuottamisessa ns. tilaaja–tuottaja-mallia. Liikennehyvinvointipalvelutilaajajohtaja vaatii, että kaupungin liikennehyvinvointipalvelutuottajajohtaja järjestäisi kaupungin bussilinjat niin, että jokaisella linjalla on 4 pysäkkiä, jokaiselta pysäkiltä pääsee matkustamaan ilman linjanvaihtoa jokaiselle pysäkille ja minkään kahden pysäkin kautta ei kulje kuin yksi linja. Viikon kuluttua liikennehyvinvointipalvelutuottajajohtaja saapuu esittelemään kahta vaihtoehtoista, eri määrän linjoja sisältävää mallia bussiliikenteen järjestämiseksi toivotulla tavalla. Kuinka monta linjaa malleissa on?

11. 11. Välisarjan monivalinnan vastauslomake 2014

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

11.11.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2014

1. Oletetaan, että reaaliluvuille x ja y pätee $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$. Mitä arvoja $x+y$ voi saada?

2. Oletetaan, että yksittäinen lentokoneen moottori vikaantuu lennon aikana todennäköisyydellä p ja eri moottorien vikaantuminen on toisistaan riippumatonta. Tiedetään, että kaksimoottorinen lentokone pystyy lentämään yhdellä moottorilla ja nelimoottorinen lentokone silloin, kun koneen molemmilla puolilla on ainakin yksi toimiva moottori. Millä p:n arvoilla kaksimoottorinen kone on turvallisempi kuin nelimoottorinen kone?

3. Tarkastellaan tasasivuista kolmiota ABC. Piste P sijaitkoon lyhyemmällä kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC. Osoita, että $|PB|=|PA|+|PC|$.

4. Laura ja Risto pelaavat seuraavaa peliä: Pöydällä on $\ell \geq 2$ lautasta, jotka ovat alun perin tyhjiä. Jokaisen kierroksen aluksi Laura siirtää osan lautasista vasemmalle ja loput oikealle puolelleen. Risto valitsee jommankumman puolen lautaset ja lisää kullekin yhden rusinan; lisäksi hän tyhjentää toisen puolen lautaset. Laura voi päättää pelin tähän ja laskea hyväkseen yhden lautasen rusinat, tai muuten peli lähtee uudelle kierrokselle. Todista, että jos Risto pelaa parhaalla mahdollisella tavalla, niin Laura voi voittaa korkeintaan $\ell-1$ rusinaa.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

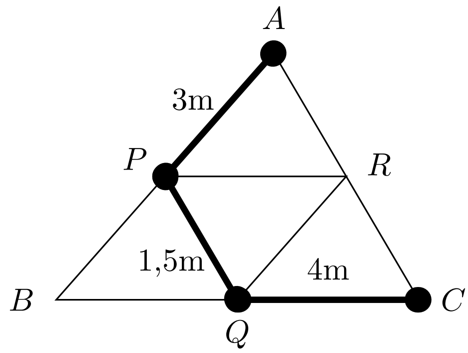
11. 11. Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie 2014

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0-4 rätta svar.

1. Ett tåg färdas mellan Ankeborg och Gåsafjäll. Av restiden går 5 % åt till att tåget står stilla vid olika tillfällen. Man vill förkorta restiden med 10 %, men man kan inte ändra på tiden där tåget står stilla. Då måste man öka tågets hastighet med ("ca" betyder med en procentenhets noggrannhet)

a) 10 %	b) under 15 %	c) ca 12 %	d) ca 15 %

2. Av ett metallrör framställer man en triangelformad ramkonstruktion ABC. Konstruktionen förstärks genom att man förenar mittpunkterna i triangelns sidor med varandra med hjälp av rördelar. I figuren invid, som kanhända inte är måttnoggrann, har man med tjocksvarta sträckor markerat några längder på en del rör eller rördelar. Hur många meter rör har man använt i figuren?



a) minst 24 m	b) minst 25 m	c) minst 26 m	d) minst 27 m

3. Existerar det positiva reella tal a och b för vilka gäller att

a) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{ab}$	b) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab}$
c) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \sqrt{ab}$	d) $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < \sqrt{ab}$

4. Vi studerar det naturliga talet

$$\begin{aligned} N = {} & 97\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531 \\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531 \\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531, \end{aligned}$$

i vilket de udda siffrorna förekommer i fallande ordning 25 gånger med mellanliggande nollor. Detta tal N är delbart med det hela talet

a) 9	b) 5	c) 3	d) 11

5. I Finland präglar man mynt á 5, 10, 20 och 50 cent. På hur många olika sätt kan man betala en räkning på en euro genom att använda dessa mynt?

a) på färre än 45 sätt	b) på färre än 50 sätt
c) på 50 sätt	d) på fler än 50 sätt

6. Man kan utveckla polynomet $(3x-1)^7$ till formen

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Hur stor är summan $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$?

a) udda	b) negativ	c) 129	d) 0

7. Beräkna längderna av diagonalerna i en regelbunden åttahörning som är inskriven i en cirkel med radien r.

8. Låt n vara ett icke-negativt heltal. På hur många sätt kan personerna A, B och C sinsemellan dela på n likadana karameller?

11. 11.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

2014

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ____________________________________

Skola : ____________________________________

Hemadress : ____________________________________

E-postadress : ____________________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

11. 11.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

2014

1. Vi studerar det naturliga talet

$$\begin{aligned}N = {} & 97\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\\ & 097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531\,097\,531,\end{aligned}$$

i vilket de udda siffrorna förekommer i fallande ordning 25 gånger med mellanliggande nollor. Detta tal N är delbart med det hela talet

a) 9	b) 5	c) 3	d) 11

2. I Finland präglar man mynt á 5, 10, 20 och 50 cent. På hur många olika sätt kan man betala en räkning på en euro genom att använda dessa mynt?

a) på färre än 45 sätt	b) på färre än 50 sätt
c) på 50 sätt	d) på fler än 50 sätt

3. Man kan utveckla polynomet $(3x-1)^7$ till formen

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Hur stor är summan $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$?

a) udda	b) negativ	c) 129	d) 0

4. Beräkna längden av diagonalerna i en regelbunden 12-hörning som är inskriven i en cirkel med radien r.

5. Vi antar att det för de reella talen x och y gäller att $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Vilka värden kan uttrycket $x+y$ anta?

6. I staden Stampeborg följer man vad gäller produktion av tjänster en s.k. beställare-producent-modell. Trafikavdelningens tjänstebeställarchef kräver att trafikavdelningens tjänsteproduktionschef ordnar stadens busslinjer så att det på varje linje finns 4 busshållplatser. Vidare ska man från varje hållplats utan linjebyte kunna åka vidare till de övriga hållplatserna. Ytterligare ska det endast gå en linje mellan två godtyckligt valda hållplatser. Efter en vecka anländer trafikavdelningens tjänsteproduktionschef för att förevisa två alternativa modeller innehållande olika antal linjer och vill på så sätt ordna busstrafiken på önskat sätt. Hur många linjer innehåller modellerna?

11. 11.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2014

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

11. 11.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens öppna serie

2014

1. Vi antar att det för de reella talen x och y gäller att $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$. Vilka värden kan uttrycket $x+y$ anta?

2. Vi antar att en enskild flygmotor får ett fel under en flygning med sannolikheten p och att olika flygmotorer får fel oberoende av varandra. Man vet att ett tvåmotorigt flygplan kan flyga även med en motor och att ett fyrmotorigt flygplan kan flyga även då minst en av de båda motorerna på båda sidorna är i skick. För vilka värden på p är det säkrare att flyga med ett tvåmotorigt plan än med ett fyrmotorigt plan?

3. Vi studerar en liksidig triangel ABC. Punkten P befinner sig på den kortare bågen AC till triangelns omskrivna cirkel. Visa att $|PB| = |PA| + |PC|$.

4. Laura och Risto spelar ett spel: På bordet finns $\ell \geq 2$ tallrikar vilka till en början är tomma. I början av varje rond flyttar Laura en del av tallrikarna till sin vänstra och resten till sin högra sida. Risto väljer tallrikarna från någondera sidan och lägger ett russin på var och en av dessa tallrikar. Ytterligare tömmer han tallrikarna på den andra sidan. Laura kan avsluta spelet här och räkna sig tillgodo russinen på en tallrik. I övriga fall fortsätter spelet med en ny rond. Bevisa: Om Risto spelar på bästa möjliga sätt så kan Laura vinna högst $\ell - 1$ stycken russin.

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

11. 11. 2014

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	+	−
2.	+	+	−	−
3.	+	−	+	+
4.	−	−	−	−
5.	−	+	−	−
6.	+	−	+	−

P1. Junan nopeus (liikkeellä) on aluksi v_0 ja matka-aika T_0. Matkan pituus s on tietenkin muuttumaton. Koska matka-ajasta 5% kuluu aluksi pysähdyksiin, saadaan

$$v_0 = \frac{s}{(1-0,05)T_0} = \frac{s}{0{,}95T_0}.$$

Junan nopeudeksi tulee muutoksen jälkeen v_1 ja uudeksi matka-ajaksi saadaan

$$T_1 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0.$$

Jotta pätisi $T_1 = 0{,}90T_0$, täytyy olla

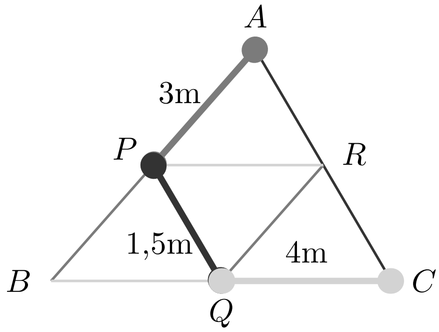
$$0{,}9T_0 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0 \iff 0{,}85T_0 = \frac{s}{v_1} \iff v_1 = \frac{s}{0{,}85T_0},$$

joten

$$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{s/(0{,}85T_0) - s/(0{,}95T_0)}{s/(0{,}95T_0)} = \frac{1/0{,}85 - 1/0{,}95}{1/0{,}95}$$
$$= 0{,}95/0{,}85 - 1 = 0{,}1/0{,}85 = 11{,}8\%.$$

Siis kohta c on oikein.

P2.



Koska kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on puolet kolmion kolmananesta sivusta, kukin kolmesta merkitystä pituudesta esiintyy rakennelmassa tasan kolmesti. Tankoa kuluu siis $3 \cdot (1{,}5\text{m} + 3\text{m} + 4\text{m}) = 25{,}5\text{m}$. Kohdat a ja b ovat oikein.

P3. Ensiksi havaitaan, että jos $a = b$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{2}{a}\right) = a = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{ab}.$$

Siis kohdat a ja c ovat mahdollisia. Toinen esimerkki osoittaa, että myös kohdan d epäyhtälö on mahdollinen: jos $a = 1$ ja $b = 4$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) = 2 : \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{8}{5} < 2 = \sqrt{1 \cdot 4}.$$

Tutkitaan vielä kohdan b epäyhtälöä:

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab} \iff 2ab : (b + a) > \sqrt{ab}$$
$$\iff 4a^2b^2 : (a + b)^2 > ab \iff 4ab : (a + b)^2 > 1$$
$$\iff 4ab > (a + b)^2 \iff 4ab > a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff 0 > a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

mikä on mieletöntä (huomattakoon, että neliöönkorotus säilytti vertailun suunnan, koska luvut olivat positiivisia). Siis kohdan b tilannetta ei voi toteuttaa.

Huomautus: Luku $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ on itse asiassa lukujen a ja b *harmoninen keskiarvo*, $\sqrt{ab}$ vastaavasti *geometrinen keskiarvo*. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon suuruusjärjestys oli tunnettu jo vanhalla ajalla osana ns. babylonialaista epäyhtälöketjua.

P4. Mikään tarjotuista vaihtoehdoista ei pidä paikkaansa, mikä todetaan tunnettuja jaollisuussääntöjä käyttäen: Merkitään kokonaislukuvun N viimeistä numeroa v:llä, numeroiden summaa s ja vuorottelevaa summaa a:lla. Huomataan, että viimeinen numero $v = 1$ ei ole viidellä jaollinen eikä numeroiden summa $s = 25\cdot(9+7+5+3+1) = 25 \cdot 25 = 625 = 3 \cdot 208 + 1$ edes kolmella jaollinen, joten kohdat a, b ja c ovat väärin. Vuorottelevaksi numeroiden summaksi saadaan $a = 25 \cdot (0 - 9 + (7 - 5) + (3 - 1)) = 25 \cdot (-5) = -125 = -11^2 - 4$, mikä ei ole 11:llä jaollinen. Siis myöskään kohta d ei päde.

P5. Tarkastellaan hieman yleisempää tilannetta: Oletetaan, että laskun suuruus on $0{,}1n$ €, missä $n \in \mathbb{N}$. Laskun voi tietenkin maksaa täsmälleen yhdellä tavalla vain viiden sentin kolikoita käyttäen, nimittäin $2n$ viiden sentin kolikolla. Jos käytettävissä on sekä viiden että kymmenen sentin kolkioita, niin tapoja maksaa $0{,}1n$ euron lasku on $n + 1$ kappaletta: käytetään k kymmenen sentin kolikkoa ja $2(n-k)$ viiden sentin kolikkoa, missä $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$. Edelleen jos käytettävissä on vain 5, 10 ja 20 sentin kolikot, niin erilaisten maksutapojen määrän voi laskea sen mukaan, kuinka monta 20 sentin kolikkoa käytetään. Jos k on laskun maksamiseen käytettyjen 20 sentin kolikoiden lukumäärä, niin $0{,}2k \leq 0{,}1n$ eli $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, ja maksettavaksi jää vielä $0,1 \cdot (n - 2k)$ €, josta jo tiedetään, miten monella tavalla sen voi maksaa viiden ja kymmenen sentin kolikoilla. Tapoja on kaikkiaan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n - 2k + 1) &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot \frac{n + 1 + (n - 2\lfloor n/2 \rfloor + 1)}{2} \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot (n + 1 - \lfloor n/2 \rfloor) \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil n/2 \rceil + 1)\,.\end{aligned}$$

Sovelletaan saatuja tuloksia alkuperäiseen tehtävään. Maksussa voi käyttää 0, 1 tai 2 viidenkymmenen sentin kolikkoa. Jos 50 sentin kolikoita ei käytetä lainkaan, niin maksun voi maksaa edellisen kaavan mukaan $(\lfloor 10/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil 10/2 \rceil + 1) = 6 \cdot 6 = 36$ tavalla. Yhtä 50 sentin kolikkoa käytettäessä tapoja maksaa loput 50 senttiä muunlaisilla kolikoilla on $(\lfloor 5/2 \rfloor + 1) \cdot (\lceil 5/2 \rceil + 1) = 3 \cdot 4 = 12$. Lopuksi jää vielä mahdollisuus maksaa euron lasku kahdella 50 sentin kolikolla. Eri tapoja on siis $36 + 12 + 1 = 49$ ja ainoastaan kohta b on oikein.

P6. Merkitään $P(x) = (3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. Saadaan

$$\begin{aligned}a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 &= \sum_{k=1}^{7} a_k = \left(\sum_{k=0}^{7} a_k\right) - a_0 \\ =&P(1) - P(0) = (3 \cdot 1 - 1)^7 - (0 - 1)^7 = 2^7 - (-1 = 128 + 1 = 129.\end{aligned}$$

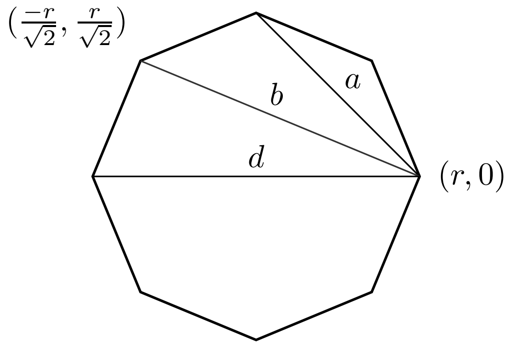
Siis kohdat a ja c ovat oikein ja muut väärin.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Säännöllisellä kahdeksankulmiolla on kolmenpituisia lävistäjiä: kahden, kolmen ja neljän sivun murtoviivaa vastaavat. Pisimmät näistä ovat myös vastaavan ympyrän halkaisijoita ja niiden yhteinen pituus on siis $d = 2r$. Lyhyimmät ovat tarkasteltavan ympyrän sisään piirretyn neliön sivuja, ja niiden pituus a saadaan Pythagoraan lauseella

$$a^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow a = r\sqrt{2}.$$

Kolmannen lävistäjänpituuden määrittämiseksi asetetaan säännöllinen kahdeksankulmio koordinaatistoon niin, että symmetriakeskipiste on origossa ja yksi kärjistä pisteessä $(r, 0)$.



Tällöin yhden lävistäjän päätepisteet ovat $(r, 0)$ ja $(r\cos(3\pi/2), r\sin(3\pi/2)) = (-r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$, joten keskimmäistä pituutta olevien lävistäjien pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{(r-(-r/\sqrt{2})^2 + (0 - r/\sqrt{2})^2} \\
&= r\sqrt{\left((\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}\right)^2 + (1/\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1} = r\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Vastaus: *Säännöllisen monikulmion lävistäjien pituudet ovat* $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ *ja* $2r$.

P8. Jako voidaan tehdä seuraavasti: Jakajalla on n karamellin lisäksi kaksijakomerkkiä. Hän asettaa nämä $n+2$ kappaletta riviin, jolloin A saa vasemmanpuoleisen jakomerkin vasemmalle puolelle jääneet karamellit, B jakomerkkien väliin jäävät karamellit ja C loput. Jakaja tulee siis valinneeksi jakomerkkien paikat $n+2$ mahdollisesta paikasta, joten jaon voi tehdä

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

tavalla.

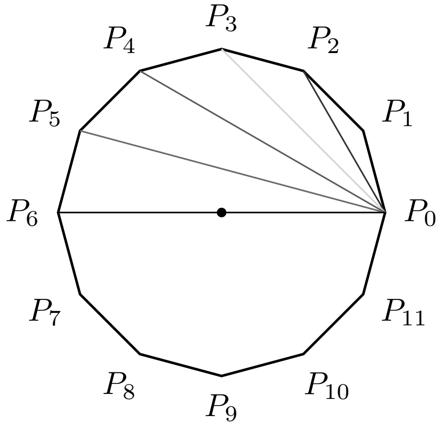
Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	−	−
2.	−	+	−	−
3.	+	−	+	−

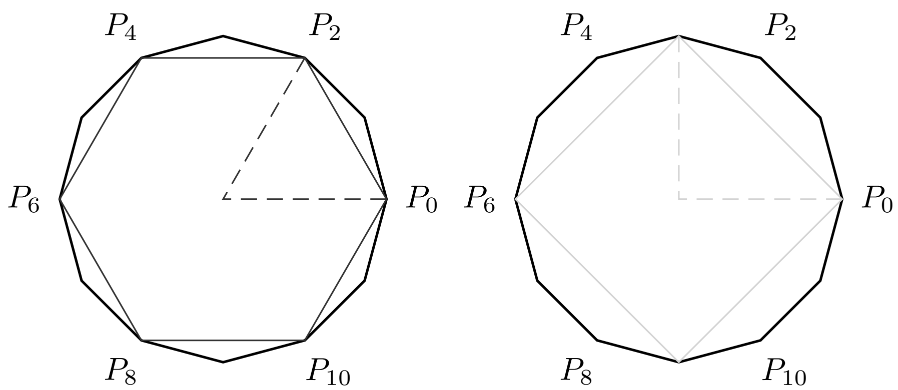
Monivalintatehtävien välillä on vastaavuudet **V1=P4**, **V2=P5** ja **V3=P6**.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4. Nimetään 12-kulmion kärjet P_i:ksi ($i \in \{0, \cdots, 11\}$) positiiviseen kiertosuuntaan lukien. Koska 12-kulmio on säännöllinen, selvitettävänä ovat pituudet $|P_0P_2|$, $|P_0P_3|$, $|P_0P_4|$, $|P_0P_5|$ ja $|P_0P_6|$. Merkitään lisäksi 12-kulmion symmetriakeskipistettä O:lla.

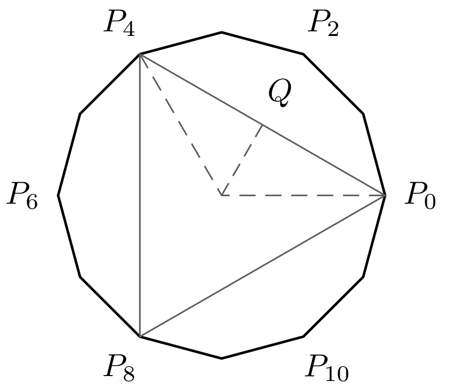


Näistä P_0P_6 on 12-kulmion ja ympyrän halkaisija, joten sen pituus on $2r$. Lävistäjät P_0P_2, P_0P_3 ja P_0P_4 ovat myös tarkasteltavan ympyrän sisään piirrettyjen säännöllisen kuusikulmion, neliön tai tasasivuisen kolmion sivuja.



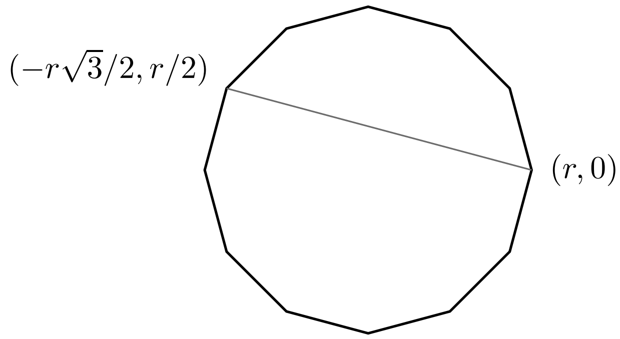
Lisäksi huomataan, että P_0P_2O ja P_0P_3O ovat kolmioita, joiden sivuista kaksi ovat ympyrän säteitä. Koska edellinen on tasasivuinen ja jälkimmäinen suorakulmainen, niin $|P_0P_2| = r$ ja $|P_0P_3| = r\sqrt{2}$.

Kolmio $P_0P_4P_8$ on tasasivuinen, ja sen sivun pituus saadaan tutulla tavalla tarkastelemalla kuvion pientä suorakulmaista kolmiota P_0OQ.



Saadaan $|P_0P_4| = 2|P_0Q| = 2r\cos(\pi/6) = 2r \cdot (\sqrt{3}/2) = r\sqrt{3}$.

Lävistäjän P_0P_5 pituuden laskemiseksi valitaan koordinaatit niin, että $O = (0,0)$ ja $P_0 = (r,0)$. Tällöin $P_5 = r(\cos(5\pi/6), \sin(5\pi/6)) = (-r\sqrt{3}/2, r/2)$



Saadaan

$$\begin{aligned}|P_0P_5| &= \sqrt{(r-(-r\sqrt{3}/2))^2 + (0-r/2)^2} = r\sqrt{\left(1+(\sqrt{3}/2)\right)^2 + (1/2)^2} \\ &= r\sqrt{1+\sqrt{3}+3/4+1/4} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Vastaus: *Lävistäjien pituudet ovat r, $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ja $2r$.*

Huomautus: Tehtävän voi ratkaista tietenkin monella tavalla geometrian, trigonometrian ja analyyttisen geometrian tietojen avulla. Erityisen miellyttäväksi laskut tulevat, jos taitaa kompleksiaritmetiikkaa: esimerkiksi 12-kulmion kärjet ovat tällöin kompleksilukuja z^i, missä $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ sekä $z = \sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2$, ja toiseksi pisimmän lävistäjän pituus on

$$r|z^5 - 1| = r\left|-\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2\right| = r\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

V5. Tehtävänanto siis kertoo, että luvut $x + \sqrt{x^2+1}$ ja $y + \sqrt{y^2+1}$ ovat toistensa käänteislukuja. Toisaalta

$$\begin{aligned}(x+\sqrt{x^2+1})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} = \sqrt{x^2+1}-x.\end{aligned}$$

Siis $\sqrt{x^2+1} - x = (x+\sqrt{x^2+1})^{-1} = y + \sqrt{y^2+1}$. Lukujen x ja y roolit voi tietysti vaihtaa, ja saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = -y + \sqrt{y^2+1} \\ -x + \sqrt{x^2+1} = y + \sqrt{y^2+1}, \end{cases}$$

josta laskemalla puolittain erotukset seuraa

$$2x = x + \sqrt{x^2+1} - (-x + \sqrt{x^2+1}) = -y + \sqrt{y^2+1} - (y + \sqrt{y^2+1}) = -2y$$

eli $x = -y$ eli $x + y = 0$.

Vastaus: $x + y$ *on vakio* 0.

V6. Olkoon P yksi mallin pysäkeistä, ja tarkastellaan kaikkia pysäkin P kautta kulkevia linjoja. Kuvataan linjoja pysäkkien joukkoina; merkitään kaikkien pysäkkien joukkoa $\mathcal{P}$:llä. Jos L ja L' ovat kaksi pysäkin P kautta kulkevaa linjaa, niin P on niiden ainoa yhteinen pysäkki. Toisaalta jos Q on mikä tahansa pysäkki, niin on olemassa linja L, jolle $P, Q \in L$. Siis P:n kautta kulkevat linjat osittavat joukon $\mathcal{P} \setminus \{P\}$. Koska jokaisella linjalla on neljä pysäkkiä, tästä seuraa $|\mathcal{P}| = 1 + 3k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$.

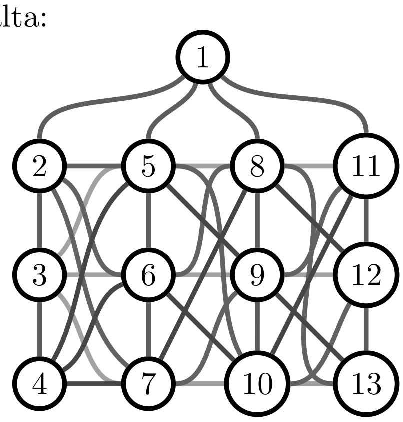
Selvästi yksi malli on sellainen, jossa $|\mathcal{P}| = 4$ ja kaikkien pysäkkien kautta ajaa yksi ainokainen linja. Tarkastellaan toista mallia, jossa $|\mathcal{P}| > 4$. Koska $k \geq 2$, pysäkin P kautta kulkevat eri linjat L ja L', joista L kulkee jonkin pysäkin $Q \neq P$ ja L' jonkin pysäkin $Q' \neq P$ kautta. Tiedetään, että $Q \neq Q'$ ja on olemassa linja L^*, jolle $Q, Q' \in L^*$. Tämä linja L^* ei voi kulkea pysäkin P kautta, koska L on ainoa linja, jolle $P, Q \in L$, ja $L \neq L^*$, sillä $Q' \notin L$, $Q' \in L^*$. Tilausvaatimusten mukaan jokaisella linjan P kautta kulkevalla k linjalla on L^*:n kanssa täsmälleen yksi pysäkki. Tästä seuraa $k = |L^*| = 4$. Siis

$$|\mathcal{P}| = 1 + 3 \cdot 4 = 13.$$

Osoitetaan vielä, että tällainen 13 linjan malli on mahdollinen. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi pysäkkejä luvuilla 1:stä 13:een. Linjoiksi valitaan

$$\begin{array}{cccc} \{1,2,3,4\}, & \{1,5,6,7\}, & \{1,8,9,10\}, & \{1,11,12,13\}, \\ & \{2,5,10,12\}, & \{2,6,8,13\}, & \{2,7,9,11\}, \\ & \{3,5,8,11\}, & \{3,6,9,12\}, & \{3,7,10,13\}, \\ & \{4,5,9,13\}, & \{4,6,10,11\}, & \{4,7,8,12\}. \end{array}$$

Linjakartta näyttää seuraavalta:



Rutiinitarkastus osoittaa, että millä tahansa kahdella linjalla on vain yksi yhteinen pysäkki. Kukin linja kattaa kuusi pysäkkiparia, joten tästä ensimmäisestä huomiosta seuraa, että yhteensä linjat kulkevat $13 \cdot 6 = 78$ pysäkkiparin kautta. Koska

$$\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78,$$

kukin pysäkkipari on hoideltu ja linjamalli täyttää vaatimukset.

Huomautus: Ratkaisussa esitelty 13 linjan malli on esimerkki ns. *äärellisestä geometriasta*. Tässä yhteydessä linjoja ja pysäkkejä nimitetään pikemminkin *suoriksi* ja *pisteiksi*. Äärellisen geometrian aksioomat vaativat, että mitkä tahansa kaksi suoraa leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä ja että minkä tahansa kahden pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen suora.

Äärellisiä geometrioita muodostetaan tyypillisesti *projektiivisina geometrioina*. Tehtävän tapauksessa lähdettäisiin liikkeelle Rubikin kuutiosta, joka muodostuu 27 pikku kuutiosta. Sopivalla koordinatisoinnilla pikkukuutioiden keskipisteet ovat pisteissä (x, y, z), missä $x, y, z \in \{-1, 0, 1\}$. Kun origokeskinen pikkukuutio poistetaan ja vastakkaisilla puolilla olevat pikkukuutiot samastetaan (eli origon kautta kulkevat suorat projisioidaan pisteiksi), jää jäljelle $(27 - 1)/2 = 13$ pistettä. Origon kautta kulkevat diskreetit tasot muuttuvat tässä projektiossa muodostuvan äärellisen geometrian suoriksi. Kun pisteiden (x, y, z) sijasta viitataan pisteisiin luvuilla $9x + 3y + 1$, saadaan tehtävän linjakartta.

Avoin sarja

A1=V5.

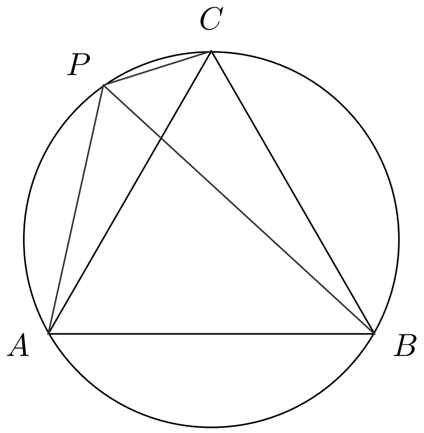
A2. Kaksimoottorinen kone pystyy lentämään todennäköisyydellä $1 - p^2$ ja nelimoottorinen todennäköisyydellä $1 - p^4 - 4p^3(1 - p) - 2p^2(1 - p)$; tämä saadaan tapauksista ”kaikki moottorit vikaantuvat”, ”kolme moottoria vikaantuu ja yksi ei” (tällä yhdellä on a a a neljä mahdollisuutta) ja ”kaksi saman puolen (kaksi mahdollisuutta) moottoria vikaantuu, mutta toisen puolen moottorit eivät”. Kaksimoottorinen kone on turvallisempi kaikilla niillä p:n arvoilla, jotka toteuttavat ehdon

$$1 - p^2 > 1 - p^4 - 4p^3(1 - p) - 2p^2(1 - p)^2 = 1 + p^4 - 2p^2$$

eli $p^2 > p^4$. Tämä toteutuu aina, kun $0 < p < 1$.

Vastaus: *Kaksimoottorinen on turvallisempi kaikilla* p, *joille* $0 < p < 1$; *jos* $p = 0$ *tai* $p = 1$, *kaksi- ja nelimoottorinen lentokone ovat yhtä turvallisia.*

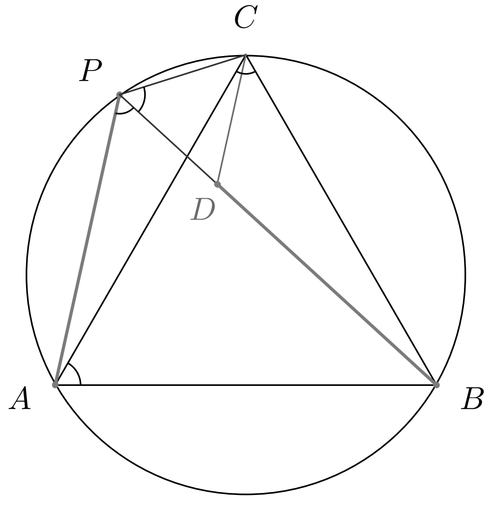
A3. Piirretään kuva tilanteesta:



Ensiksi havaitaan, että

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BPC = \pi/3 = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BPA \text{ ja } \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC,$$

kunkin parin kohdalla on nimittäin kyse yhteistä keskuskulmaa vastaavista kehäkulmista, joka kahden ensimmäisen parin kohdalla on $2\pi/3$. Valitaan janalta PB piste D, jolle $|BD| = |PA|$.



Koska $\sphericalangle DBC = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC$, $|PA| = |DB|$ ja $|AC| = |BC|$, niin kolmiot DBC ja PAC ovat yhteneviä. Erityisesti $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CPA = \sphericalangle CPB + \sphericalangle BPA = \pi/3 + \pi/3 = 2\pi/3$, joten vastaava kehäkulma on $\sphericalangle CDP = \sphericalangle BDC/2 = \pi/3$. Koska $\sphericalangle CDP = \sphericalangle BPC = \pi/3$, niin kolmio CDP on tasasivuinen. Siis

$$|PB| = |PD| + |DB| = |PC| + |PA| = |PA| + |PC|.$$

Tapa 2: Tarkastellaan r-säteisen ympyrän kulmaa φ vastaavaa jännettä. Kun koordinaatisto kiinnitetään sopivasti, niin jänteen päätepisteet ovat $(r\cos(\varphi/2), r\sin(\varphi/2))$ ja $(r\cos(\varphi/2), -r\sin(\varphi/2))$. Jänteen pituudeksi saadaan siis

$$2r\sin(\varphi/2).$$

Merkitään φ:llä kaarta CP vastaavan keskuskulman suuruutta. Sinin yhteenlaskukaavalla saadaan

$$\begin{aligned}2\sin(\pi/3+\alpha) &= 2\big(\sin(\pi/3)\cos\alpha + \cos(\pi/3)\sin\alpha\big)\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha.\end{aligned}$$

Kaikkiaan

$$\begin{aligned}|PA| + |PC| &= 2r\sin((2\pi/3-\varphi)/2) + 2r\sin(\varphi/2) = r\big(2\sin(\pi/3-\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2)\big)\\ &= r(\sqrt{3}\cos(-\varphi/2) + \sin(-\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2))\\ &= r(\sqrt{3}\cos(\varphi/2) - \sin(\varphi/2) + 2\sin(\varphi/2))\\ &= r(\sqrt{3}\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)) = r(2\sin(\pi/3+\varphi/2)) = 2r(\sin((2\pi/3+\varphi)/2))\\ &= |PB|,\end{aligned}$$

sillä kaarta PB vastaavan keskuskulman suuruus on $2\pi/3 + \varphi$.

A4. Todistetaan, että seuraava invariantti pysyy totena Riston parhaalla pelillä: Jokaisella $j \le \ell$, $j \in \mathbb{N}$, on korkeintaan $\ell - j$ lautasta, joilla on vähintään j rusinaa. Tämä on triviaalisti totta pelin aluksi, sillä lautaset ovat silloin tyhjiä ja $0 \le \ell - j$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $j \le \ell$ sekä lisäksi $\ell \le \ell - 0$. Oletetaan, että k kierroksen jälkeen niiden lautasten lukumäärä, joilla on vähintään j rusinaa, on $a_j \le j - \ell$, kun $j \le \ell$ ja $j \in \mathbb{N}$. Näistä a_j lautasesta Laura siirtää vasemmalle b_j kappaletta ja oikealle c_j kappaletta. Merkitään r:llä suurinta rusinoiden lukumäärää, mitä millään lautasella on; induktio-oletuksen mukaan $r < \ell$, sillä $a_\ell \le \ell - \ell = 0$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että ainakin yksi niistä lautasista, joilla on r rusinaa, on vasemmalla. Siis $b_r > 0$. Risto tyhjentää vasemmanpuoliset lautaset ja lisää oikeanpuoleisille lautasille kullekin yhden rusinan, Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $j \le \ell$ on nyt c_{j-1} lautasta, joilla on vähintään j rusinaa. Koska induktio-oletuksen mukaan

$$c_{j-1} = a_{j-1} - b_{j-1} \le a_{j-1} - b_r < a_{j-1} \le \ell - (j-1) = \ell - j + 1,$$

niin $c_{j-1} \le \ell - j$. Tapauksessa $j = 0$ induktioväite on triviaalisti totta. Siis Riston parhaalla pelillä millään lautasella ei ole rusinoita enemmän kuin $\ell - 1$.