27. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

2015

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta. **Laskimet eivät ole sallittuja.**

1. Hiiri juoksee tasaisella nopeudella v liukuhihnan päällä hihnan päästä päähän ja takaisin. Liukuhihnan rullausnopeus u on pienempi kuin hiiren nopeus v. Hiiren todellinen matka-aika verrattuna siihen, että hihna ei liikkuisi

a) on lyhyempi
b) on pitempi
c) on samansuuruinen
d) ei ole selvitettävissä annettujen tietojen perusteella.

2. Mikä on avoimen välin $]1, 2[$ pienin reaaliluku?

a) 1.
b) Sellaista ei ole olemassa.
c) $1 + 10^{-99}$.
d) Mikään vaihtoehdoista a, b tai c ei ole oikein.

3. Neliö, jonka sivu on a, jaetaan lävistäjän suuntaisella suoralla kahteen osaan. Osien pinta-alojen suhde on $1 : 4$. Neliön sisään jäävän suoran osan pituus on

a) $\dfrac{a}{2}$ b) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

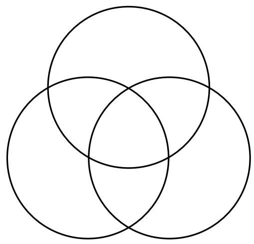
4. Määritellään jono $x_0, x_1, x_2, \ldots$ asettamalla $x_0 = 2015$ ja $x_n = (x_{n-1})^2 + 1$, kun n on positiivinen kokonaisluku. Mitä voidaan sanoa kokonaisluvun x_{2015} viimeisestä numerosta?

a) Se on 2. b) Se on 7.
c) Se on parillinen. d) Se on viidellä jaollinen.

5. Lauseke $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ on kaikilla reaalilukujen a, b ja c arvoilla sama kuin

a) $(a^2-(b-c)^2)(-a+b+c)$
b) $(a+b-c)((a-b)^2-c^2)$
c) $-a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-2abc$
d) $4(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+abc)-(a+b+c)^3$.

6. Kolme r-säteistä ympyrää sijaitsevat niin, että jokaisen kahden keskipisteet ovat kolmannella ympyrällä. Mitä voidaan sanoa näin syntyneen kuvion piirin (ulkoreunan) pituudesta p ja kuvion pinta-alasta A?



a) $A < p^2$.
b) $p = 3\pi r$.
c) $A > 6r^2$.
d) $A = (2\pi + \sqrt{3})r^2$.

7. Määritä ne positiivisten kokonaislukujen parit, joiden summa on 162 ja suurin yhteinen tekijä 18.

8. Todista, että $a^{n+4} - a^n$ on jaollinen kymmenellä, kun n ja a ovat positiivisia kokonaislukuja.

27. 10. 2015

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

27.10. 2015

1. Neliö, jonka sivu on a, jaetaan lävistäjän suuntaisella suoralla kahteen osaan. Osien pinta-alojen suhde on $1:4$. Neliön sisään jäävän suoran osan pituus on

a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Kuinka monella tavalla luku 2015 voidaan esittää muodossa $p + qrs$, missä p, q, r ja s ovat kaikki alkulukuja ja $p < q < r < s$?

a) Ei yhdelläkään tavalla. b) Parittoman monella tavalla.
c) Parillisen monella tavalla. d) Korkeintaan kymmenellä eri tavalla.

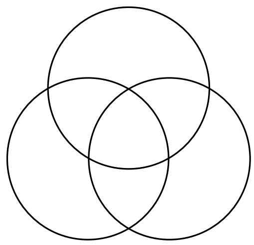
3. Olkoot $a, b, c \in [0,1]$. Mikä on lausekkeen

$$ab + ac + bc + 1 - abc - a - b - c$$

suurin arvo?

a) $1/2$ b) 1 c) $5/4$ d) $3/2$

4. Kolme r-säteistä ympyrää sijaitsevat niin, että jokaisen kahden keskipisteet ovat kolmannella ympyrällä. Määritä näin syntyneen kuvion piiri p ja kuvion pinta-ala A.



5. Olkoon $f\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ kuvaus, jolle $f(mn) = f(m)f(n)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{Z}$, että $f(a) = f(a+1) = 1$.

6. Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *kupera*, jos kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $t \in [0,1]$ pätee

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b).$$

a) Osoita, että kuperalle kuvaukselle f pätee

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \le f(a) + f(b),$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ ja $a < b$.

b) Tutki, päteekö epäyhtälö $f(2a - b) \le 2f(a) - f(b)$ kaikille kuperille $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja luvuille $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

27. 10. 2015

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

27.10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

2015

1. Olkoot a ja b peräkkäisiä kokonaislukuja, $c = ab$ ja $d = a^2 + b^2 + c^2$.
a) Osoita, että $\sqrt{d}$ on kokonaisluku.
b) Mitä voit sanoa luvun $\sqrt{d}$ parillisuudesta tai parittomuudesta?

2. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion terävien kulmien kärjistä ovat 2 ja 4. Laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo).

3. On annettuna 41 luvun joukko A. Tiedetään, että näistä jokaisen 21:n luvun summa on suurempi kuin muiden 20:n luvun summa. Montako negatiivista lukua joukossa A enintään voi olla?

4. Käytössä on kolme kirjainta A, B ja C. Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi neljän kirjaimen merkkijono ABBA. Kuinka monta merkkijonoa, joissa on n kirjainta ja joissa on parillinen määrä A-kirjaimia, voidaan muodostaa, kun n on positiivinen kokonaisluku?

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

27. 10.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens grundserie

2015

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0-4 rätta svar. **Räknare är inte tillåtna.**

1. En mus springer med jämn hastighet v på ett löpande band från en ända till den andra och tillbaka. Löpande bandets hastighet u är lägre än musens hastighet v. Musens verkliga färdtid, jämfört med att löpande bandet inte skulle vara i rörelse,

a) är kortare
b) är längre
c) är lika stor
d) går det inte att ta reda på på basis av de givna uppgifterna.

2. Vilket är det minsta reella talet i det öppna intervallet $]1, 2[$?

a) 1.
b) Ett sådant existerar inte.
c) $1 + 10^{-99}$.
d) Inget av alternativen a, b eller c är korrekt.

3. En kvadrat med sidan a delas in i två områden med en linje som är parallell med diagonalen. Förhållandet mellan delarnas areor är $1 : 4$. Längden av den del av linjen som blir innanför kvadraten är

a) $\dfrac{a}{2}$ b) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

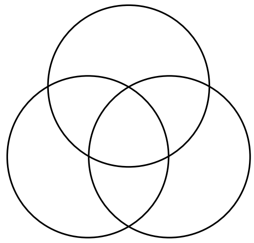
4. Vi definierar en talföljd $x_0, x_1, x_2, \ldots$ så att $x_0 = 2015$ och $x_n = (x_{n-1})^2 + 1$, där n är ett positivt heltal. Vad kan sägas om den sista siffran i heltalet x_{2015}?

a) Den är 2. b) Den är 7.
c) Den är jämn. d) Den är delbar med 5.

5. Uttrycket $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ är för alla reella värden på talen a, b och c detsamma som uttrycket

a) $(a^2-(b-c)^2)(-a+b+c)$
b) $(a+b-c)((a-b)^2-c^2)$
c) $-a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-2abc$
d) $4(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+abc)-(a+b+c)^3$.

6. Tre cirklar (med radien r) är placerade så att medelpunkterna för vilka som helst två av dem ligger på den tredje cirkeln. Vad kan vi säga om längden p av omkretsen (ytterranden) samt arean A av den figur som då uppstår?



a) $A < p^2$.
b) $p = 3\pi r$.
c) $A > 6r^2$.
d) $A = (2\pi + \sqrt{3})r^2$.

7. Bestäm de positiva heltalspar vilkas summa är 162 och största gemensamma faktor är 18.

8. Bevisa att $a^{n+4} - a^n$ är delbart med tio då n och a är positiva heltal.

27.10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

2015

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

27. 10.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens mellanserie

2015

1. En kvadrat med sidan a delas in i två områden med en linje som är parallell med diagonalen. Förhållandet mellan delarnas areor är $1 : 4$. Längden av den del av linjen som blir innanför kvadraten är

a) $\dfrac{a}{2}$	b) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	c) $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$	d) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. På hur många olika sätt kan talet 2015 skrivas i formen $p + qrs$ där p, q, r och s är primtal sådana att $p < q < r < s$?

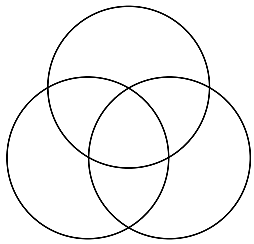
a) Inte ett ända sätt.	b) På ett udda antal sätt.
c) På ett jämnt antal sätt.	d) På högst tio sätt.

3. Låt $a, b, c \in [0, 1]$. Vilket är största värdet av uttrycket

$$ab + ac + bc + 1 - abc - a - b - c?$$

a) 1/2	b) 1	c) 5/4	d) 3/2

4. Tre cirklar (med radien r) är placerade så att medelpunkterna för vilka som helst två av dem ligger på den tredje cirkeln. Bestäm omkretsen p och arean A av den figur som då uppstår.



5. Låt $f\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ vara en avbildning för vilken $f(mn) = f(m)f(n)$, när $m, n \in \mathbb{Z}$. Visa att det existerar ett $a \in \mathbb{Z}$ sådant att $f(a) = f(a + 1) = 1$.

6. Avbildningen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är *konvex* om det för alla $a, b \in \mathbb{R}$ och $t \in [0, 1]$ gäller att

$$f(ta + (1 - t)b) \le tf(a) + (1 - t)f(b).$$

a) Visa att det för den konvexa avbildningen f gäller att

$$f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \le f(a) + f(b),$$

när $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ och $a < b$.

b) Undersök om olikheten $f(2a - b) \le 2f(a) - f(b)$ gäller för alla konvexa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b$.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

27. 10. 2015

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ____

Skola : ____

Hemadress : ____

E-postadress : ____

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

1. Låt a och b vara på varandra följande heltal så att $c = ab$ och $d = a^2 + b^2 + c^2$.

a) Visa att $\sqrt{d}$ är ett heltal.

b) Vad kan vi svara på frågan om $\sqrt{d}$ är udda eller jämnt?

2. I en rätvinklig triangel inskrivs en cirkel och avstånden mellan cirkelns medelpunkt och de två spetsvinkliga hörnen i triangeln är 2 och 4. Beräkna längden (exakta värdet) av hypotenusan.

3. Du har givet en mängd A av 41 tal. Vi vet att summan av vilka som helst 21 st. tal är större än summan av de 20 övriga talen. Hur många negativa tal kan det högst finnas i mängden A?

4. Till vårt förfogande finns tre bokstäver: A, B och C. Av dessa kan vi t.ex. bilda en teckenföljd av fyra bokstäver ABBA. Hur många teckenföljder med n st. bokstäver och ett jämnt antal A-bokstäver kan vi bilda, när n är ett positivt heltal?

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Räknare är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

27. 10. **Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut** 2015

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	−	−
2.	−	+	−	−
3.	−	−	−	−
4.	+	−	+	−
5.	+	−	+	+
6.	+	+	+	−

P1. Olkoon hihnan pituus s. Oletus $v > u$ merkitsee, että hiiri todella pystyy juoksemaan hihnan päästä päähän. Matka-aika on

$$t = \frac{s}{v-u} + \frac{s}{v+u} = \frac{s(v+u)+s(v-u)}{(v+u)(v-u)} = \frac{2sv}{v^2-u^2} < \frac{2sv}{v^2} = \frac{2s}{v}.$$

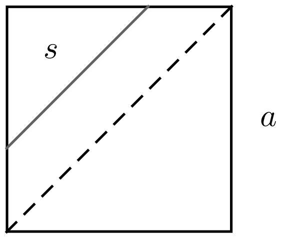
Siis matka-aika on pidempi, kuin jos hihna olisi pysähdyksissä.

P2. Avoin välille pätee $]1,2[\, = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \,\}$. Se koostuu siis niistä reaaliluvuista x, joille $1 < x < 2$. Reaaliluku 1 ei toteuta tätä ehtoa (vaihtoehto a on siis väärin). $1 + 10^{-99} \in \,]1,2[$, mutta $1 + 10^{-99}$ ei ole välin pienin, koska esimerkiksi $1 < 1 + 5 \cdot 10^{-100} < 1 + 10^{-99} < 2$ (vaihtoehto c ei myöskään ole oikein). Itse asiassa kaikilla $x \in \,]1,2[$ pätee

$$1 < \frac{1+x}{2} < x < 2,$$

joten avoimella välillä $]1,2[$ ei ole pienintä alkiota ja ainoastaan vaihtoehto b on oikein.

P3. Kuvaan on piirretty punaisella lävistäjän suuntaisesta suorasta neliön sisään jäävä osa. Tehtävässä kysytään sen pituutta s, kun neliön ala jakaantuu suhteessa $1:4$.



Tarkasteltava jana rajaa yhdessä neliön kulman kanssa suorakulmaisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen neliön puolikkaan kanssa. Tämän kolmion ala on oletuksen mukaan $\frac{1}{5}a^2$. Merkitään x:llä näiden yhdenmuotoisen kolmion suhdetta, ts. punaisen kolmion kateetin pituus on xa ja hypotenuusan $s = xa\sqrt{2}$. Oletuksesta siis seuraa

$$\frac{1}{5}a^2 = \frac{1}{2}(xa)^2 \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Siten

$$s = xa\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{5}},$$

eikä mikään vaihtoehdoista ole oikein.

P4. Tarkastellaan ensin parillisuutta: Jos x_{n-1} on parillinen, niin myös $(x_{n-1})^2$ on parillinen, joten $x_n = (x_{n-1})^2 + 1$ on pariton. Jos taas x_{n-1} on pariton, niin vastaavasti $x_n = (x_{n-1})^2 + 1$ on parillinen. Siis parillisuus ja parittomuus vuorottelevat jonossa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Koska $x_0 = 2015$ on pariton, tästä seuraa, että x_{2015} ja myös tämän luvun viimeinen numero on parillinen (eli vaihtoehto c on oikein).

Tarkastellaan sitten viidellä jaollisuutta: $0^2+1 = 1$, $1^2+1 = 2$, $2^2+1 = 5 \pmod 5$, joten viidellä jaollisuus toistuu niin, että $x_{3k} \equiv 0 \pmod 5$, kun taas $x_{3k+1} \equiv 1 \pmod 5$ ja $x_{3k+2} \equiv 2 \pmod 5$, kun $k \in \mathbb{N}$. Koska $2015 = 3 \cdot 671 + 2$, niin $x_{2015} \equiv 2 \pmod 5$. Luvun x_{2015} viimeinen numero on siis parillinen ja sen jakojäännös viidellä jaettaessa on 2. Ainoa mahdollisuus viimeiseksi numeroksi on siis 2 (vaihtoehto a), kohdat b ja d ovat väärin.

P5. Perusalgebralla saadaan

$$\begin{aligned}
&(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\\
&= (a+b-c)(a-(b-c))(-a+b+c)\\
&= (a^2-(b-c)^2)(-a+b+c)\\
&= (-a+b+c)(a^2-(b-c)^2) && \text{(vaihtoehto a)}\\
&= (-a+b+c)(a^2-b^2-c^2+2bc)\\
&= (-a^3+ab^2+ac^2-2abc)+(a^2b-b^3-bc^2+2b^2c)+(a^2c-b^2c-c^3+2bc^2)\\
&= -a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+2b^2c-b^2c+c^2a-c^2b+2c^2b-2abc\\
&= -a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-2abc && \text{(vaihtoehto c)}
\end{aligned}$$

sekä edelleen

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^3\\
&= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\\
&= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc,
\end{aligned}$$

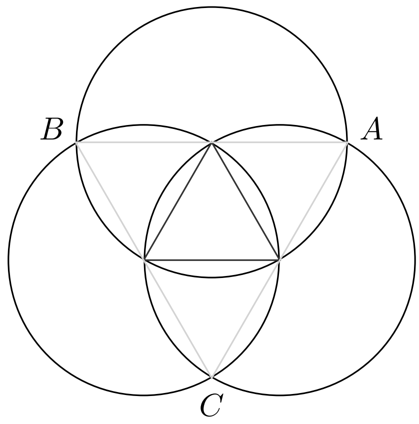
mistä seuraa

$$\begin{aligned}
&4(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+abc)-(a+b+c)^3\\
&= 4(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+abc)\\
&\qquad -(a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc)\\
&= -a^3-b^3-c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-2abc.
\end{aligned}$$

Siis myös vaihtoehto d on oikein.

Vaihtoehdossa b sen sijaan on merkkivirhe; sijoittamalla $a=1$, $b=c=0$ havaitaan, että alkuperäisen lausekkeen arvoksi tulee $(1+0-0)(1-0+0)(-1+0+0)=-1$, mutta vaihtoehtoa b vastaavaksi arvoksi $(1+0-0)((1-0)^2-0^2)=1$.

P6. Koska ympyrät ovat samansäteisiä ja kulkevat toistensa keskipisteiden kautta, keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärkiä. Olkoot A, B ja C muut ympyröiden leikkauspisteet, kuten kuvassa. Koska myös nämä pisteet muodostavat kahden ympyrän keskipisteen kanssa tasasivuisia kolmioita, niin $\triangle ABC$:n sivut ovat ympyröiden halkaisijoita.



Kuvion piiri muodostuu siis kolmesta puoliympyrästä, joten sen pituus on

$$p = 3\pi r.$$

Vaihtoehto b on siis oikein. $\triangle ABC$:n sivujen yhteinen pituus on $2r$ ja ala

$$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot(2r\sin(\pi/3)) = r\cdot(2r\sqrt{3}/2) = r^2\sqrt{3}.$$

Kuvio koostuu tästä kolmiosta ja kolmesta puoliympyrästä, joten kuvion koko ala on

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) + r^2\sqrt{3} = \left(\frac{3}{2}\pi + \sqrt{3}\right) r^2.$$

Vaihtoehto d on siis väärin, ja koska $\frac{3}{2}\pi + \sqrt{3} > \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} = 6$, niin vaihtoehto c on kuitenkin oikein. Kohta a pitää myös paikkansa, sillä

$$A = \left(\frac{3}{2}\pi + \sqrt{3}\right) r^2 < (2\pi + \pi)\, r^2 = 3\pi r^2 < 3^2\pi^2 r^2 = p^2.$$

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}_+$ sellaisia, että $a + b = 162$ ja $\mathrm{syt}(a, b) = 18$. Tällöin on olemassa $m, n \in \mathbb{Z}_+$, joille $a = 18m$ ja $b = 18n$, joten $18(m+n) = 18m+18n = a+b = 162 = 18\cdot 9$. Siis $m + n = 9$. Voidaan olettaa, että $m < n$, ja lisäksi havaitaan, että $\mathrm{syt}(m, n) = 1$. Mahdollisia tapauksia ovat siis $m = 1$ ja $n = 2$ tai $m = 2$ ja $n = 7$ tai $m = 4$ ja $n = 5$, mistä saadaan

$$\begin{cases} a = 18 \\ b = 144 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 36 \\ b = 126 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 72 \\ b = 90 \end{cases}.$$

Vastaus: *Kysytyt parit ovat* $\{18, 144\}$, $\{36, 126\}$ *ja* $\{72, 90\}$.

P8. Jaetaan tarkasteltava luku t tekijöihin:

$$t = a^{n+4} - a^n = a^n(a^4 - 1) = a^4(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^4(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$$

Luku t on parillinen, sillä se sisältää parillisen tekijän. Jos nimittäin a on parillinen, niin myös a^n on parillinen, sillä $n \in \mathbb{Z}_+$. Jos taas a on pariton, niin $a + 1$ on parillinen.

Osoitetaan, että t on myös viidellä jaollinen. Kirjoitetaan a muodossa $a = 5m + k$, missä $m, k \in \mathbb{N}$ ja $k < 5$. Jos $k = 0$, niin $5 \mid a^n$. Jos $k = 1$, niin $5 \mid a - 1 = 5m$. Jos $k = 4$, niin vastaavasti $5 \mid a + 1 = 5m + 5 = 5(m + 1)$. Jäljelle jäävät tapaukset $k = 2$ ja $k = 3$. Tällöin

$$a^2 + 1 = (5m + k)^2 + 1 = 25m^2 + 10mk + k^2 + 1 = 5 \cdot (5m^2 + 2mk) + k^2 + 1$$

on viidellä jaollinen, sillä sekä $2^2 + 1 = 5$ että $3^2 + 1 = 10$ ovat viidellä jaollisia.

Koska t on parillinen ja viidellä jaollinen, niin se on kymmenellä jaollinen. $\square$

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	−	−
2.	−	+	−	+
3.	−	+	−	−

V1=P3.

V2. Oletetaan, että p, q, r ja s ovat alkulukuja, $p < q < r < s$ ja $2015 = p + qrs$. Jos p on pariton, niin $2015 - p$ on parillinen, joten sen alkutekijäesityksessä esiintyy kokonaisluku 2. Tällöin ehto $p < q < r < s$ ei voi millään toteutua. Siis $p = 2$. Luvulle $2015 - p$ saadaan nyt alkutekijäesitys $2015 - p = 2015 - 2 = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Siis

$$\begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \\ r = 11 \\ s = 61 \end{cases}$$

on ainoa halutunlainen esitys. Vaihtoehdot b ja d ovat oikein, a ja c väärin.

V3. Merkitään tarkasteltavaa lauseketta t:llä. Huomataan, että

$$t = ab+ac+bc+1-abc-a-b-c = 1-a-b-c+ab+ac+bc-abc = (1-a)(1-b)(1-c).$$

Kun $a, b, c \in [0, 1]$, niin myös $1 - a, 1 - b, 1 - c \in [0, 1]$, joten t on näiden tulona myös välillä $[0, 1]$. Kun $a = b = c = 0$, niin $t = (1 - 0)(1 - 0)(1 - 0) = 1$, joten suurimmaksi arvoksi saadaan 1 eli vaihtoehto b on (ainoana) oikein.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4. Katso tehtävän **P6** ratkaisua.

V5. Oletetaan vastoin väitettä, että tällaista lukua $a \in \mathbb{Z}$ ei ole. Kuvauksen f toteuttamasta funktionaaliyhtälöstä saadaan ensiksi $f(k^2) = f(k \cdot k) = f(k)f(k) = (\pm 1)^2 = 1$, kun $k \in \mathbb{Z}$, eli f kuvaa kokonaislukujen neliöt ykköselle. Erityisesti

$$f(1) = f(4) = f(9) = 1$$

ja vastaoletuksesta seuraa nyt

$$f(2) = f(5) = -1.$$

Siis

$$f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) \cdot f(5) = -1 \cdot -1 = 1,$$

joten luvulle $a = 9$ pätee $f(a) = f(a + 1) = 1$, mikä kumoaa vastaoletuksen. $\square$

V6.

a) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja $t \in [0,1]$, missä $a < b$, ja olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kupera. Tällöin myös $1-t \in [0,1]$ ja kuperuudesta seuraa

$$\begin{aligned} &f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \\ &\leq tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b) \\ &= (t+(1-t))f(a) + ((1-t)+t)f(b) = f(a)+f(b). \quad \square \end{aligned}$$

b) Tutkitaan tilannetta, kun f on neliöönkorotuskuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Tämä on kupera, sillä kun $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ ja $a < b$, niin

$$\begin{aligned} &tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta+(1-t)b) \\ &= ta^2 + (1-t)b^2 - (ta+(1-t)b)^2 \\ &= ta^2 + (1-t)b^2 - (t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2) \\ &= (t-t^2)a^2 + ((1-t)-(1-t)^2)b^2 - 2t(1-t)ab \\ &= t(1-t)a^2 + (1-t)(1-(1-t))b^2 - 2t(1-t)ab \\ &= t(1-t)(a^2+b^2-2ab) = t(1-t)(a^2-2ab+b^2) \\ &= t(1-t)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tarkasteltava epäyhtälö ei kuitenkaan pidä paikkaansa esimerkiksi kun $a = -1 < b = 0$, jolloin

$$f(2\cdot(-1)-0) = f(2) = 2^2 = 4 > 2 = 2\cdot(-1)^2 - 0 = 2f(-1) - f(0).$$

Vastaus: *Kohdan b epäyhtälö ei päde yleisesti.*

Avoin sarja

A1. Voidaan olettaa, että $a < b$, jolloin $b = a+1$ ja $c = ab = a(a+1)$.

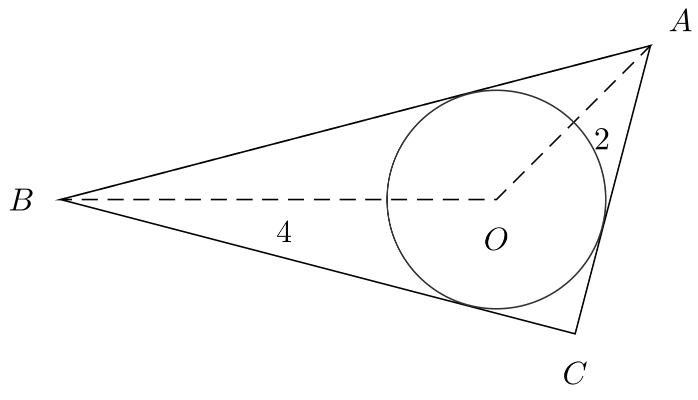
a) Koska

$$\begin{aligned} d &= a^2+b^2+c^2 = a^2+(a+1)^2+(a(a+1))^2 \\ &= a^2+a^2+2a+1+a^2(a^2+2a+1) = 1+2a+2a^2+a^4+2a^3+a^2 \\ &= 1+2a+3a^2+2a^3+a^4 = 1+a+a^2+a(1+a+a^2)+a^2(1+a+a^2) \\ &= (1+a+a^2)^2, \end{aligned}$$

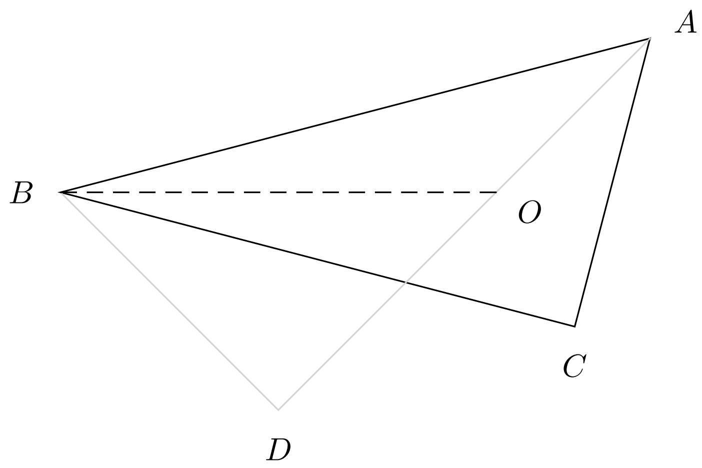
niin $\sqrt{d} = |1+a+a^2|$ on kokonaisluku. $\square$

b) Luvuista a ja b toinen on pariton ja toinen parillinen, joten $c = ab$ on parillinen. Siis toinen neliöistä a^2 ja b^2 on pariton ja toinen parillinen sekä c^2 on parillinen. Näiden summa $d = a^2+b^2+c^2$ on yhden parittoman ja kahden parillisen luvun summana pariton. Siis myös $\sqrt{d}$ on pariton.

A2. Nimetään tarkasteltavan suorakulmion ABC kärjet niin, että AB on hypotenuusa ja kärjen A etäisyys sisään piirretyn ympyrän keskipisteestä O on 2, jolloin kärjen B etäisyys tästä on vastaavasti 4. Merkitään lisäksi $\alpha = \sphericalangle BAC$ ja $\beta = \sphericalangle CBA$.



Muodostetaan suorakulmainen apukolmio ADB seuraavasti: Kärjestä A lähtevälle kulmanpuolittajalle valitaan normaali niin, että se kulkee kärjen B kautta. Kulmanpuolittajan ja normaalin leikkauspiste on tällöin D.



Koska O on kulmanpuolittajien leikkauspiste, niin

$$\sphericalangle BOA = \pi - \sphericalangle OBA - \sphericalangle BAO = \pi - \alpha/2 - \beta/2.$$

Siis vieruskulmalle pätee

$$\sphericalangle BOD = \alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2 = (\pi - \pi/2)/2 = \pi/4,$$

sillä $\triangle ABC$ on suorakulmainen. Siis $\triangle BDO$ on paitsi suorakulmainen, myös tasakylkinen, joten $|BO| = 4$, $|BD| = 4/\sqrt{2}$ ja $|DO| = 4/\sqrt{2}$. Soveltamalla Pythagoraan lausetta suorakulmaiseen kolmioon ADB saadaan nyt

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{|BD|^2+|AD|^2} = \sqrt{|BD|^2+(|AO|+|OD|)^2}\\ &= \sqrt{\left(4/\sqrt{2}\right)^2+\left(2+4/\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4^2/2+2^2+2\cdot 2\cdot 4/\sqrt{2}+4^2/2}\\ &= \sqrt{8+4+8\sqrt{2}+8} = \sqrt{20+8\sqrt{2}} = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Vastaus: *Hypotenuusan pituus on* $2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

A3. Olkoon $a \in A$ yksi luvuista. Ositetaan loput luvuista 20 alkion joukoiksi B ja C, ts.

$$A \setminus \{a\} = B \cup C,\ B \cap C = \emptyset, |B| = 20 \text{ ja } |C| = 20.$$

Merkitään $\beta = \sum_{b\in B} b$ ja $\gamma = \sum_{c\in C} c$. Tiedetään, että

$$\sum_{x\in B\cup\{a\}} x = a+\beta > \sum_{c\in C} c = \gamma$$

ja

$$\sum_{x\in C\cup\{a\}} x = a+\gamma > \sum_{b\in B} b = \beta$$

Siis $2a+\beta+\gamma = (a+\beta)+(a+\gamma) > \gamma+\beta = \beta+\gamma$ eli $2a > 0$ eli $a > 0$.

Vastaus: *Kaikki joukon A luvut ovat positiivisia.*

A4. Kutsutaan parillisen määrän kirjaimia A sisältävää merkkijonoa A-*parilliseksi* ja muita tarkasteltavia merkkijonoja A-*parittomiksi*. Merkitään s_n:llä A-parillisten pituutta n olevien merkkijonojen lukumäärää. Koska merkkijonot B ja C ovat A-parillisia, niin $s_1 = 2$. Kaikkia n kirjaimen merkkijonojahan on 3^n kappaletta, joten A-parittomia merkkijonoja on $3^n - s_n$. Tehtävän ratkaisemiseksi saadaan nyt palautuskaava ($n \in \mathbb{Z}_+$)

$$s_{n+1} = 2s_n + (3^n - s_n) = s_n + 3^n,$$

sillä pituutta $n+1$ olevan A-parillisen merkkijonon voi muodostaa joko lisäämällä pituutta n olevaan A-parilliseen merkkijonoon B tai C tahi lisäämällä A-parittomaan kirjain A. Tehdään yrite $s_n = k\cdot 3^n + c$ palautuskaavaan, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}k\cdot 3^{n+1}+c = k\cdot 3^n + c + 3^n &\iff 3k\cdot 3^n = k\cdot 3^n + 3^n\\ &\iff 2k\cdot 3^n = 3^n \iff 2k = 1 \iff k = 1/2.\end{aligned}$$

Koska toisaalta $2 = s_1 = \frac{1}{2}3^1 + c = \frac{3}{2} + c$, saadaan $c = 1/2$. Siis

$$s_n = \frac{1}{2}3^m + \frac{1}{2} = \frac{3^n+1}{2}.$$

Vastaus: *Niitä merkkijonoja, joissa on parillinen määrä kirjaimia* A *ja n kirjainta, on* $\dfrac{3^n+1}{2}$ *kappaletta.*