31. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

2016

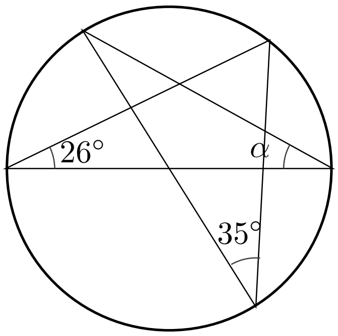
Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta. **Laskimet eivät ole sallittuja.**

1. Kauppias on ostanut erän paahtamatonta kahvia, jonka hän paahtaa ja myy sitten paahdettuna hintaan a euroa kilogrammalta. Kahvi menettää paahdettaessa painostaan 20 % ja kauppias ottaa voittoa 20 %? Tällöin kauppiaan ostohinta (€/kg) oli prosenttiyksikön tarkkuudella

a) 20 %	b) 25 %	c) 33 %	d) 40 %

pienempi kuin myyntihinta.

2. Kuvaan on piirretty ympyrän sisälle vaakasuora halkaisija ja muutamia kehäkulmia.



Päättele kulman α suuruus.

a) 23°	b) 29°	c) 34°	d) 35°

3. Tarkastellaan lausekkeita $A = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ ja $B = (ac + bd)^2$. Tällöin

a) $A > B$ kaikilla reaalilukujen a, b, c ja d arvoilla.
b) $A \geq B$ kaikilla reaalilukujen a, b, c ja d arvoilla.
c) $A > B$, kun $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ ja $d = 3$.
d) on olemassa nollasta eroavia reaalilukuja a, b, c ja d, joilla $A = B$.

4. Ympyränsektorin piiri on 40 cm ja oletetaan, että sen ala on tällaisista sektoreista suurin mahdollinen. Tällöin:

a) Sektorin kaaren ja ympyrän säteen pituus on sama.
b) Sektorin kaari on kaksi kertaa niin pitkä kuin ympyrän säde.
c) Ympyrän säde on 10 cm.
d) Sektorin keskuskulma on 90°.

5. Olkoon

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right).$$

Silloin

a) P on kokonaisluku	b) $P > 1000$
c) $P < 2016$	d) $P = 3110$

6. Kirjoitetaan polynomi $P(x) = (2x+1)^5$ lavennetussa muodossa $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mitkä polynomin $P(x)$ kertoimia koskevista väitteistä ovat tosia?

a) Kertoimien summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on kolmella jaollinen.
b) Ainakin yksi kertoimista (a_0, $a_1, \ldots$ tai a_5) on kolmella jaollinen.
c) Kertoimien summa on viidellä jaollinen.
d) Ainakin yksi kertoimista on viidellä jaollinen.

7. Kolmio ABC on tasakylkinen ja $\sphericalangle BAC > 30°$. Piste D sijaitsee kannalla BC ja piste E kyljellä AC. Oletetaan, että $\sphericalangle BAD = 30°$ ja $|AD| = |AE|$. Määritä kulma EDC.

8. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{2+4x-2x^2} + \sqrt{6+6x-3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2016

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ____________________

Koulu : ____________________

Kotiosoite : ____________________

Sähköposti : ____________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

31. 10. 2016

1. Ympyränsektorin piiri on 40 cm ja oletetaan, että sen ala on tällaisista sektoreista suurin mahdollinen. Tällöin:

a) Sektorin kaaren ja ympyrän säteen pituus on sama.
b) Sektorin kaari on kaksi kertaa niin pitkä kuin ympyrän säde.
c) Ympyrän säde on 10 cm.
d) Sektorin keskuskulma on 90°.

2. Millä vakion $a \in \mathbb{Z}$ arvolla polynomi $P(x) = x^{2016} - x^{1000} + 800x^{15} + ax^7 - 2$ on jaollinen polynomilla $Q(x) = x^{312} - 41x^{192} + 5x^8 - x$?

a) $a = -1$ b) $a = 1$ c) kaikilla $a \in \mathbb{Z}$ d) ei millään $a \in \mathbb{Z}$

3. Mitä voidaan sanoa Diofantoksen yhtälön

$$x^2 + 5y^4 = 2016$$

kokonaislukuratkaisuista?

a) Niitä on olemassa.
b) Kaikille ratkaisuille pätee $|x| < 50$ ja $|y| < 5$.
c) $x + 1$ tai $x - 1$ on viidellä jaollinen.
d) $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

4. Kolmio ABC on tasakylkinen ja $\sphericalangle BAC > 30°$. Piste D sijaitsee kannalla BC ja piste E kyljellä AC. Oletetaan, että $\sphericalangle BAD = 30°$ ja $|AD| = |AE|$. Määritä kulma EDC.

5. Kuusi pariskuntaa jaetaan ryhmiin siten, että yksikään pari ei saa joutua samaan ryhmään.

a) Kuinka monella tavalla heidät voidaan jakaa kahteen kuuden hengen ryhmään?
b) Entä kolmeen neljän hengen ryhmään?

6. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille luku x^4+4y^4 on alkuluku.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2016

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ____

Koulu : ____

Kotiosoite : ____

Sähköposti : ____

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

31. 10. 2016

1. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle luku $10!/k$ on neliöluku eli jonkin kokonaisluvun m toinen potenssi. Määritä tämä kokonaisluku m. (Positiivisen kokonaisluvun n *kertoma* $n!$ on tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.)

2. Ympyrän halkaisijan AB toisen päätepisteen A kautta piirretään ympyrälle tangentti ja pisteen B kautta jänne BC, jonka jatke leikkaa tangentin pisteessä D. Osoita, että C:n kautta piirretty ympyrän tangentti puolittaa janan AD.

3. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$

kun $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. Aino ja Väino pelaavat peliä $\mathrm{SYT}(m, n)$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Pelin alkaessa pöydällä on kaksi kivikasaa, joista toisessa on m, toisessa n kiveä. Vuorossa oleva pelaaja saa poistaa jommastakummasta kasasta minkä tahansa kivimäärän, joka on toisen kasan kivien lukumäärän positiivinen monikerta. Pelaajat poistavat kiviä vuorotellen niin, että Aino aloittaa. Se, joka pystyy tyhjentämään toisen kasoista, voittaa. Todista, että on olemassa sellainen $\alpha > 1$, että aina kun $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq \alpha n > 0$, niin Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(m, n)$.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

31. 10.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens grundserie

2016

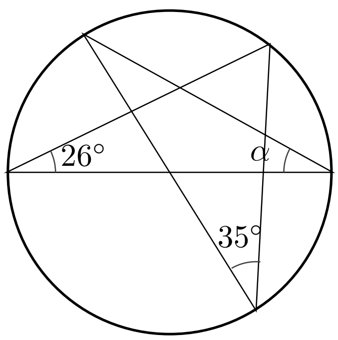
Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0-4 rätta svar. **Räknare är inte tillåtna.**

1. En köpman har köpt ett parti orostat kaffe som han rostar och sedan säljer som färdigrostat för priset a euro per kilogram. Kaffet mister vid rostningen 20 % av sin vikt och köpmannen tar 20 % vinst. Då var inköpspriset (€/kg) för köpmannen med en procentenhetsnoggrannhet

a) 20 %	b) 25 %	c) 33 %	d) 40 %

mindre än försäljningspriset.

2. I figuren har man in i cirkeln ritat en horisontal diameter och några bågvinklar.



Tag reda på storleken av vinkeln α.

a) 23°	b) 29°	c) 34°	d) 35°

3. Vi granskar uttrycken $A = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ och $B = (ac + bd)^2$. Då är

a) $A > B$ för alla värden på de reella talen a, b, c och d.
b) $A \geq B$ för alla värden på de reella talen a, b, c och d.
c) $A > B$, när $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ och $d = 3$.
d) finns det från noll avvikande reella tal a, b, c och d, för vilka $A = B$.

4. Omkretsen av en cirkelsektor är 40 cm och låt oss anta att arean av sektorn är den största möjliga av dylika sektorer. Då gäller:

a) Sektorbågen är lika lång som längden av cirkelns radie.
b) Sektorbågen är två gånger så lång som cirkelns radie.
c) Cirkelns radie är 10 cm.
d) Sektorns medelpunktsvinkel är 90°.

5. Låt

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right).$$

Då är

a) P ett heltal b) $P > 1000$ c) $P < 2016$ d) $P = 3110$

6. Vi skriver ut polynomet $P(x) = (2x+1)^5$ i formen $P(x) = a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Vilka påståenden gällande koefficienterna till polynomet P(x) är sanna?

a) Summan av koefficienterna $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ är delbar med tre.
b) Åtminstone en av koefficienterna (a_0, $a_1, \ldots$ eller a_5) är delbar med tre.
c) Summan av koefficienterna är delbar med fem.
d) Åtminstone en av koefficienterna är delbar med fem.

7. Triangeln ABC är likbent och $\sphericalangle BAC > 30°$. Punkten D finns på basen BC och punkten E på benet AC. Vi antar att $\sphericalangle BAD = 30°$ och $|AD| = |AE|$. Bestäm vinkeln EDC.

8. Lös ekvationen

$$\sqrt{2+4x-2x^2}+\sqrt{6+6x-3x^2} = x^2-2x+6.$$

31. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

2016

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

31. 10. 2016

1. Omkretsen av en cirkelsektor är 40 cm och låt oss anta att arean av sektorn är den största möjliga av dylika sektorer. Då gäller:

a) Sektorbågen är lika lång som längden av cirkelns radie.
b) Sektorbågen är två gånger så lång som cirkelns radie.
c) Cirkelns radie är 10 cm.
d) Sektorns medelpunktsvinkel är 90°.

2. För vilket värde på konstanten $a \in \mathbb{Z}$ är polynomet $P(x) = x^{2016} - x^{1000} + 800x^{15} + ax^7 - 2$ delbart med polynomet $Q(x) = x^{312} - 41x^{192} + 5x^8 - x$?

a) $a = -1$ b) $a = 1$ c) för alla $a \in \mathbb{Z}$ d) för inget $a \in \mathbb{Z}$

3. Vad kan man säga om heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$x^2 + 5y^4 = 2016?$$

a) Det existerar sådana.
b) För alla lösningar gäller att $|x| < 50$ och $|y| < 5$.
c) $x + 1$ eller $x - 1$ är delbart med fem.
d) $x \neq 0$ och $y \neq 0$.

4. Triangeln ABC är likbent och $\sphericalangle BAC > 30°$. Punkten D finns på basen BC och punkten E på benet AC. Vi antar att $\sphericalangle BAD = 30°$ och $|AD| = |AE|$. Bestäm vinkeln EDC.

5. Sex par delas i grupper så att inget par får hamna i samma grupp.
a) På hur många sätt kan man dela in dem i två grupper med sex personer i varje grupp?
b) Ändå på hur många sätt kan man dela in dem i tre grupper med fyra personer?

6. Sök alla sådana positiva heltal x och y, för vilka $x^4 + 4y^4$ är ett primtal.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

31. 10. 2016

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ________________________________

Skola : ________________________________

Hemadress : ________________________________

E-postadress : ________________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

31. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

2016

1. Bestäm det minsta positiva heltal k, för vilket talet $10!/k$ är ett kvadrattal d.v.s. kvadraten på något heltal m. Bestäm detta heltal m. (*Fakulteten* $n!$ av ett positivt tal n är lika med produkten $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.)

2. Genom ändpunkten A på diametern AB i en cirkel ritas en tangent till cirkeln. Och genom punkten B ritas en korda BC och förlängningen av BC skär tangenten i punkten D. Visa att en tangent till cirkeln genom punkten C halverar sträckan AD.

3. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vilka satisfierar olikheten

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$

när $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. Aino och Väinö spelar ett spel vid namn $\mathrm{SGF}(m, n)$, där m och n är positiva heltal. När spelet börjar finns det två stenhögar på bordet, en med m stycken stenar och en med n stycken stenar. Den spelare vars tur det är får avlägsna så många stenar han vill från någondera högen så att detta antal utgör någon positiv multipel på antalet stenar som finns i den andra högen. Spelarna avlägsnar stenar i tur och ordning så att Aino börjar. Den som lyckas tömma någondera högen vinner. Bevisa att det finns ett sådant $\alpha > 1$ att alltid när $m, n \in \mathbb{N}$ och $m \geq \alpha n > 0$, så har Aino en vinststrategi i spelet $\mathrm{SGF}(m, n)$.

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Räknare är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

High School Mathematics Competition

First Round, Basic Level

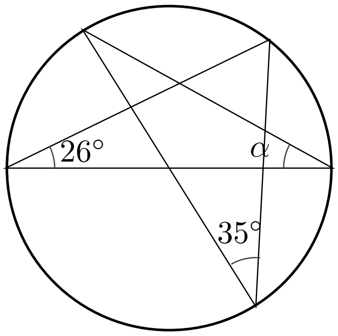
31. 10. 2016

The problems are on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers. **The use of calculators is not allowed.**

1. A merchant bought a quantity of unroasted coffee, roasted it and then sold it for a euros per kilogram. In roasting, the coffee loses 20 % of its weight. The merchant's profit is 20 %. The buying price (€/kg) was smaller than the selling price (to one percentage point) by

a) 20 % b) 25 % c) 33 % d) 40 %

2. In the picture, a horizontal diameter and some inscribed angles have been drawn.



Deduce the size of angle α.

a) 23° b) 29° c) 34° d) 35°

3. Consider the expressions $A = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ and $B = (ac + bd)^2$. Then

a) $A > B$ for all real numbers a, b, c and d.
b) $A \geq B$ for all real numbers a, b, c and d.
c) $A > B$ for $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ and $d = 3$.
d) There are real numbers a, b, c and d such that $A = B$.

4. The perimeter of a circular sector is 40 cm, and its area is maximal among sectors of this kind. Then:

a) The arc of the sector and the radius of the circle are of equal length.
b) The arc of the sector is twice as long as the radius.
c) The radius of the circle is 10 cm.
d) The central arc of the sector is $90°$.

5. Let

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015}\right)\left(1 + \frac{1}{2016}\right).$$

Then

a) P is an integer b) $P > 1000$ c) $P < 2016$ d) $P = 3110$

6. We write the polynomial $P(x) = (2x + 1)^5$ in the expanded form $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Which of the claims on the coefficients of the polynomial $P(x)$ are true?

a) The sum $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ is a multiple of three.
b) At least one of the coefficients (a_0, a_1, ... or a_5) is a multiple of three.
c) The sum of the coefficients is a multiple of five.
d) At least one of the coefficients is a multiple of five.

7. The triangle ABC is isosceles, and $\sphericalangle BAC > 30°$. D is a point on the base BC and E is a point on the leg AC. We assume that $\sphericalangle BAD = 30°$ and $|AD| = |AE|$. Determine $\sphericalangle EDC$.

8. Solve the equation

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

31. 10. 2016

The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. Please write your name and school with block letters on every paper you return.

Name : ________________________________

School : ________________________________

Home address : ________________________________

Email : ________________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

31. 10.

High School Mathematics Competition

First Round, Intermediate Level

2016

1. The perimeter of a circular sector is 40 cm, and its area is maximal among sectors of this kind. Then:

a) The arc of the sector and the radius of the circle are of equal length.
b) The arc of the sector is twice as long as the radius.
c) The radius of the circle is 10 cm.
d) The central arc of the sector is $90°$.

2. For which values of the constant $a \in \mathbb{Z}$ is the polynomial $P(x) = x^{2016} - x^{1000} + 800x^{15} + ax^7 - 2$ divisible by the polynomial $Q(x) = x^{312} - 41x^{192} + 5x^8 - x$?

a) $a = -1$, b) $a = 1$ c) all $a \in \mathbb{Z}$ d) no $a \in \mathbb{Z}$

3. What can be said of the integer solutions of the Diophantine equation

$$x^2 + 5y^4 = 2016?$$

a) Such solutions exist.
b) All solutions satisfy $|x| < 50$ and $|y| < 5$.
c) $x + 1$ or $x - 1$ is a multiple of 5.
d) $x \neq 0$ and $y \neq 0$.

4. The triangle ABC is isosceles, and $\sphericalangle BAC > 30°$. D is a point on the base BC and E is a point on the leg AC. We assume that $\sphericalangle BAD = 30°$ and $|AD| = |AE|$. Determine $\sphericalangle EDC$.

5. Six couples will be divided into groups in such a way that no group contains both members of any of the couples.
a) In how many ways can they be divided into two groups of six persons each?
b) What about groups of four persons?

6. Find all positive integers x and y such that the number $x^4 + 4y^4$ is a prime number.

31. 10. Intermediate Level Multiple Choic 2016
Answer Sheet

The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. Please write your name and school with block letters on every paper you return.

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

31. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Open Level

2016

1. Determine the smallest positive integer k such that the number $10!/k$ is a perfect square, i.e., the second power of some integer m. Find this integer m. (For a positive integer n, the *factorial* of n is the product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ and is denoted by $n!$.)

2. The diameter of a circle is AB, and the tangent at A and a chord BC are drawn. The extension of BC meets the tangent at D. Show that the tangent to the circle at C intersects the segment AD at its midpoint.

3. Determine all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying the inequality

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$$

for x, y, $z \in \mathbb{R}$.

4. Aino and Väinö play the game GCD(m, n), where m and n are positive integers. At the start of the game there are two heaps of stones on the table, one containing m and the other one n stones. At her/his turn a player can remove from one of the heaps any positive multiple of the number of stones in the other heap. The players remove stones in turn, and Aino starts. The player who is able to take all stones from one heap wins. Show that there exists an $\alpha > 1$ such that whenever m, $n \in \mathbb{N}$ and $m \geq \alpha n > 0$, Aino has a winning strategy in GCD(m, n), i.e. whatever Väinö's moves are, she can secure victory to her.

31. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

2016

Perussarjan monivalintatehtävät

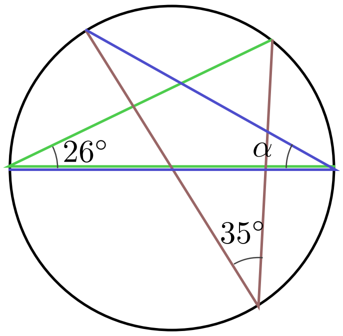
	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$+$	$-$
2.	$-$	$+$	$-$	$-$
3.	$-$	$+$	$+$	$+$
4.	$-$	$+$	$+$	$-$
5.	$-$	$+$	$+$	$-$
6.	$+$	$-$	$-$	$+$

P1. Kauppias ostakoon p kg paahtamatonta kahvia, jonka ostohinta olkoon b €/kg. Ostettaessa kahvi maksaa siis pb €. Koska kahvi paahdettaessa menettää painostaan 20 %, niin myytävän kahvin paino on $0{,}8p$ kg, ja kauppias saa siitä $0{,}8pa$ €. Jotta voittoa olisi 20 %, pitää olla voimassa yhtälö

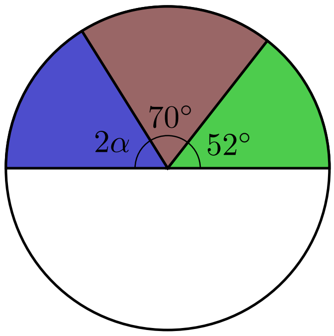
$$0{,}8pa = 1{,}2pb \text{ eli } b = \frac{0{,}8}{1{,}2}a = 2a/3.$$

Ostohinta oli siis $(1 - 2/3) \cdot 100\,\% = 100/3\,\% \approx 33\%$ pienempi kuin myyntihinta, joten vaihtoehto c on oikein ja muut väärin.

P2. Kuvio muodostuu itse asiassa ympyrän sisään piirretyistä kehäkulmista, joista α ja kaksi tunnettua on tässä merkitty väreillä kuvioon.



Kun näitä kehäkulmia vastaavista keskuskulmista piirretään kuvio, huomataan, että ympyrän ylempi puolisko koostuu vastaavista sektoreista.



Siis

$$2\alpha + 70^\circ + 52^\circ = 180^\circ \iff 2\alpha = 180^\circ - 70^\circ - 52^\circ = 58^\circ \iff \alpha = 29^\circ$$

Siis vaihtoehto b on oikein ja muut väärin.

P3. Lausekkeiden erotukselle saadaan

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc = (ad - bc)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Siis $A \geq B$ kaikilla lukujen a, b, c ja d arvoilla eli vaihtoehto b on oikein. Kun $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ ja $d = 3$, niin $(ad - bc)^2 = (12 \cdot 3 - 5 \cdot 8)^2 = (36 - 40)^2 = (-4)^2 = 16 > 0$, joten $A > B$ ja vaihtoehto c on myös oikein. On kuitenkin mahdollista, että $(ad - bc)^2 = 0$, nimittäin esimerkiksi silloin, kun $a = b = c = d = 1 \neq 0$, joten vaihtoehto d on oikein ja a väärin.

P4. Merkitään $p = 40\,\text{cm}$ ja α:lla sektorin keskuskulmaa ja r:llä ympyrän sädettä. Tunnetusti sektorin ala on

$$A = \alpha r^2/2,$$

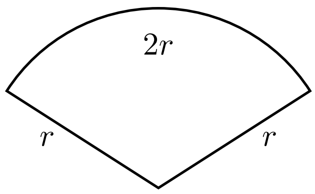
mutta toisaalta sektorin piirille pätee

$$p = \alpha r + 2r \iff \alpha r = p - 2r,$$

joten toinen tuntemattomista α ja r voidaan eliminoida pinta-alan lausekkeesta:

$$A = \frac{\alpha r \cdot r}{2} = \frac{(p-2r)r}{2} = pr/2 - r^2.$$

Pinta-ala A on siis säteen r toiseen asteen funktio, ja koska toisen asteen kerroin -1 on negatiivinen, sillä on suurin arvo, joka saavutetaan nollakohtien $r = 0$ ja $r = p/2$ puolivälissä eli arvolla $r = p/4$. Tällöin $r = p/4 = 10\,\mathrm{cm}$ (vaihtoehto c on oikein), $\alpha r = p - 2r = 4r - 2r = 2r$ (vaihtoehto b on oikein ja a väärin) ja $\alpha r = 2r \Rightarrow \alpha = 2$. Viimeisessä yhtälössä kulmamitta on tietenkin radiaaneissa ja suora kulma on $\pi/2 \neq 2$, joten vaihtoehto d on myös väärin. (Kuvassa tilanteen mukainen sektori mittakaavassa 1:5.)



P5. Tehtävän lauseke supistuu muotoon

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2017}{2016} = \frac{2017}{2} = 1008,5.$$

Vastaus ei siis ole kokonaisluku, joten a ja d ovat väärin, mutta $1000 < P < 2016$, joten b ja c ovat oikein.

P6. Kertoimien summa on

$$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0 = a_5\cdot 1^5+a_4\cdot 1^4+a_3\cdot 1^3+a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0 = P(1) = (2\cdot 1+1)^5 = 3^5 = 243$$

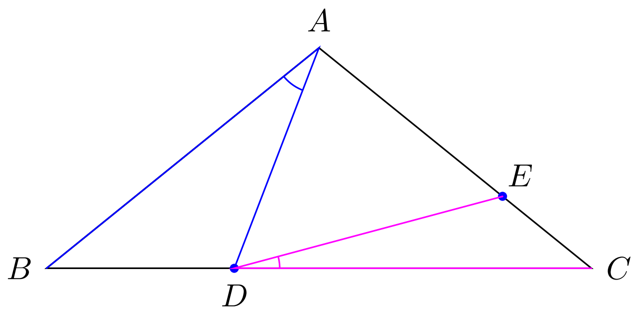
on selvästi kolmella, mutta ei viidellä jaollinen (vaihtoehto a oikein, mutta c väärin). Binomikaavasta saadaan

$$P(x) = (2x+1)^5 = (2x)^5 + \binom{5}{4}(2x)^4 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \binom{5}{2}(2x)^2 + \binom{5}{1}2x + 1$$

eli esimerkiksi ensimmäisen asteen termin kerroin $\binom{5}{1} \cdot 2 = 10$ on viidellä jaollinen (vaihtoehto d oikein). Koska binomikertoimet $\binom{5}{k}$ ja kakkosen potenssit 2^k eivät ole kolmella jaollisia, niin mikään kertoimista ei ole kolmella jaollinen (b väärin).

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Piirretään kuvio tilanteesta. Kuvassa $\sphericalangle BAD = 30°$ on tunnettu (sinisellä) ja määritettävä $\sphericalangle EDC$ on sinipunaisella.



Merkitään kantakulmia $\alpha = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, jolloin $\sphericalangle DAC = 180° - 2\alpha - 30° = 150° - 2\alpha$. Kolmio ADE on tehtävänannon mukaan myös tasakylkinen, ja $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAE$ on sen huippukulma. Tämän tasakylkisen kolmion kantakulmalle saadaan

$$\sphericalangle DEA = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle DAE) = \frac{1}{2}(180° - (150° - 2\alpha)) = \frac{1}{2}(30° + 2\alpha) = 15° + \alpha.$$

Siis $\sphericalangle DEC = 180° - (15° + \alpha) = 165° - \alpha$. Lopuksi saadaan

$$\sphericalangle EDC = 180° - \sphericalangle DCE - \sphericalangle DEC = 180° - \alpha - (165° - \alpha) = 15°.$$

Vastaus: *Kulma EDC on $15°$.*

P8. Merkitään $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, jolloin yhtälö muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6 \\ \iff &\sqrt{4 - 2(x-1)^2} + \sqrt{9 - 3(x-1)^2} = (x-1)^2 + 5 \\ \iff &\sqrt{4 - 2t} + \sqrt{9 - 3t} = t + 5. \end{aligned}$$

Toisaalta koska $t \geq 0$, niin

$$\sqrt{4 - 2t} + \sqrt{9 - 3t} \leq \sqrt{4} + \sqrt{9} \leq 2 + 3 = 5 \leq t + 5,$$

kunhan neliöjuurilausekkeet ovat määriteltyjä eli $t \leq 2$. Yhtälö ei siis voi olla voimassa muuten, kuin että yo. kaksoisepäyhtälössä molemmat vertailut ovat yhtäsuuruuksia, mikä toteutuu täsmälleen silloin, kun $t = 0$. Siis $t = (x-1)^2 = 0$ eli $x = 1$, jolloin selvästi yhtälö toteutuu.

Vastaus: *Yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 1$.*

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	+	−
2.	−	−	−	+
3.	+	+	+	+

V1=P4.

V2. Polynomien vakiotermejä tarkastelemalla havaitaan, että $Q(0) = 0$ ja $P(0) = -2$ riippumatta parametrin a arvosta. Jos $Q(x)$ jakaisi $P(x)$:n, niin pätisi kuitenkin $P(0) = S(0)Q(0) = 0$ (jollakin polynomilla $S(x)$). Siis $P(x)$ ei voi olla jaollinen $Q(x)$:llä millään $a \in \mathbb{Z}$ eli vain vaihtoehto d on oikein, muut vääriä.

V3. Tarkastellaan Diofantoksen yhtälöä

$$x^2 + 5y^4 = 2016.$$

Jos $|x| \geq 50$, niin $x^2 + 5y^4 \geq (50)^2 + 5 \cdot 0 = 2500 > 2016$, joten kaikille ratkaisuille pätee $|x| < 50$. Jos $|y| \geq 5$, niin $x^5 + 5y^4 \geq 5y^4 \geq 5 \cdot 5^4 = 5^5 = 3125 > 2016$, joten kaikille ratkaisuille pätee myös $|y| < 5$. Siis vaihtoehto b pätee.

Yhtälöstä seuraa

$$x^2 \equiv x^2 + 5y^4 = 2016 = 5 \cdot 403 + 1 \equiv \pmod 5,$$

joten $x \equiv \pm 1 \pmod 5$. Siis $x + 1$ tai $x - 1$ on viidellä jaollinen eli vaihtoehto c pätee.

Koska vaihtoehto c on voimassa, niin x ei ole viidellä jaollinen ja $x \neq 0$. Toisaalta 2016 ei ole kokonaisluvun neliökään (toistuvasti lukua puolittamalla havaitaan, että $2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 63$ eli kakkosen parittoman potenssin ja parittoman luvun tulo), joten $y \neq 0$. Siis vaihtoehto d on voimassa.

Jos tarkasteltavalla yhtälöllä on ratkaisu, niin sillä on ratkaisu, jossa x ja y ovat positiivisia. Ehdon b nojalla riittää käydä läpi y:n arvot 1, 2, 3 ja 4, ja seulomalla löytyy ratkaisu $x = 44$ ja $y = 2$ ($44^2 + 5 \cdot 2^4 = 1936 + 80 = 2016$), joten kohta a on oikein. Kaikki kohdat siis pätevät.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P7.

V5.

a) Kiinnitetään pariskunnista yksi, henkilöt AA ja BB. He joutuvat eri ryhmiin, nimetään AA:n ryhmä A:ksi ja BB:n B:ksi. Kunkin muun pariskunnan kohdalla pitää valita, kumpi joutuu ryhmään A ja kumpi ryhmään B; valinnan voi tehdä kahdella eri tavalla kunkin viiden muun pariskunnan kohdalla. Eri tapoja jakaa pariskunnat kuuden hengen ryhmiin on siis $2^5 = 32$ kappaletta.

b) Sovitaan taas, että AA:n ryhmä on A ja BB:n B. Lisäksi on olemassa ryhmä C, johon kumpikaan AA:sta ja BB:stä ei pääse. Viidestä jäljelle jäävästä parista valitaan ensin toinen pariskunta, josta kumpikaan ei ole pääse ryhmään C; tämä valinta voidaan tehdä 5 tavalla. Lisäksi tämän pariskunnan kohdalla päätetään, kumpi joutuu ryhmään A ja kumpi ryhmään B (2 tapaa). Lopuista neljästä pariskunnasta sijoitetaan ensin toinen ryhmään C, mikä voidaan tehdä $2^4 = 16$ tavalla. Vielä on täytettävän kaksi paikkaa ryhmään A ja ryhmään B. Tämä vastaa kahden hengen valitsemista neljästä, minkä voi tehdä $\binom{4}{2} = 6$ tavalla. Kaikkiaan tapoja muodostaa ryhmät on

$$5 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 6 = 960.$$

Vastaus: *Ryhmät voidaan muodostaa a) 32 b) 960 tavalla.*

V6. Lausekkeen $p = x^4 + 4y^4$ voi jakaa tekijöihin huomaamalla, että sen voi täydentää summan ja erotuksen tuloksi. Siis

$$p = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + y^2).$$

Luvut p, $x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = (x + y)^2 + y^2$ ja $x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2$ ovat kaikki selvästi epänegatiivisia ja itse asiassa positiivisia, koska p on alkuluku. Toisaalta jotta p olisi alkuluku, täytyy tämän löydetyn tekijöihinjaon trivialisoitua niin, että

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = p \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Jälkimmäinen yhtälö merkitsee, että $(x - y)^2 + y^2 = x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$, mikä voi toteutua vain, kun $x = y = 1$. Toisaalta $5 = 1^4 + 4 \cdot 14$ on alkuluku.

Vastaus: 5 *on ainoa haluttua muotoa oleva alkuluku.*

Avoin sarja

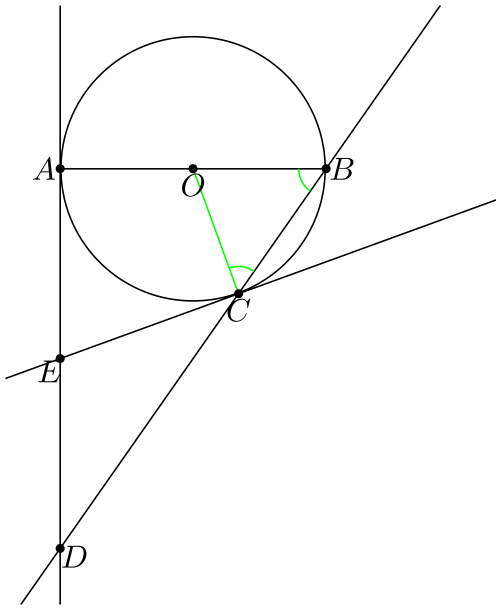
A1. Kymmenen kertoman voi kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} 10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 7m^2, \end{aligned}$$

missä $m = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. Siis 7 on luku, jolle $10!/7$ on neliöluku. Pienempää tällaista positiivista kokonaislukua ei ole, koska 7 on alkuluku ja $7 \nmid 720$. Siis $k = 7$ ja $m = 720$ ovat kysytyt luvut.

Vastaus: $k = 7$ *ja* $m = 720$.

A2. Ympyrän keskipiste olkoon O. Pisteen C kautta piirretty tangentti leikatkoon janan AD pisteessä E.



Merkitään $\alpha = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$. Tällöin $\sphericalangle ECD = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Myös $\sphericalangle ADB = 90° - \alpha$. Siis kolmio CDE on tasakylkinen, joten $|ED| = |EC|$. Tangenttikulman kylkinä myös $|EA| = |EC|$, joten $|AE| = |ED|$ eli E puolittaa janan AD. $\square$

A3. Sijoittamalla $y = z$ epäyhtälö supistuu muotoon

$$f(xy) - f(x)f(y^2) \geq \frac{1}{4},$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$. Erityisesti kun t on yhtälön $t^2 = t$ ratkaisu eli $t = 0$ tai $t = 1$, saadaan

$$f(t^2) - f(t)f(t^2) \geq \frac{1}{4}$$

eli

$$f(t) - f(t)^2 \geq \frac{1}{4} \iff 0 \geq \frac{1}{4} - f(t) + f(t)^2 = (\frac{1}{2} - f(t))^2,$$

mikä on tietenkin mahdollista vain, jos $f(t) = \frac{1}{2}$. Siis $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$. Sijoittamalla nyt ylinpään johdettuun epäyhtälöön vuoroin $y = 0$, vuoroin $y = 1$ päädytään seuraaviin epäyhtälöihin, jotka ovat voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} f(0) - f(x)f(0) \geq \dfrac{1}{4} \\ f(x) - f(x)f(1) \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \dfrac{1}{2} - f(x) \cdot \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4} \\ f(x) - f(x) \cdot \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 1 - f(x) \geq \dfrac{1}{2} \\ 2f(x) - f(x) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \dfrac{1}{2} \geq f(x) \\ f(x) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
\iff & f(x) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Rutiinitarkastus osoittaa, että vakiofunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ on todella ratkaisu:

$$\frac{1/2 + 1/2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

Vastaus: *Vakiofunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ on todella ratkaisu.*

A4. Valitaan luvuksi α kultainen leikkaus $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, joten α toteuttaa yhtälön $\alpha^2 = \alpha + 1$. Osoitetaan induktiolla summan $m + n$ suhteen, että kun $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 0$, niin jos $m > \alpha n$, niin Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(m, n)$, muuten Väinöllä on voittostrategia tässä pelissä.

1) Jos $n \mid m$, niin Aino voi ensimmäisellä siirrollaan tyhjentää kasan, jossa on m kiveä, joten Aino voittaa. Tämä tapaus sisältää induktion aloitusaskeleen $m + n = 3$, jolloin $m = 2$ ja $n = 1$. Huomataan lisäksi, että $m \geq 2n \geq \alpha n$.
2) Oletetaan, että $n < m < \alpha n$. Pelin sääntöjen mukaan Ainon on pakko ottaa kivet suuremmasta kasasta eli siitä, jossa on m kiveä. Koska $m < 2n$, niin hänellä ei ole vaihtoehtoja: kiviä on noukittava n kappaletta. Peli siis jatkuu tilanteesta, jossa kasoissa on n ja $m - n$ kiveä, ja vuoro on Väinöllä. Tässä $0 < m - n < n$ ja

   $$\frac{n}{m - n} > \frac{n}{\alpha n - n} = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha - 1} = \alpha.$$

   Induktio-oletuksen mukaan Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(n, m-n)$, mutta tässä pelissä Aino aloittaa ja nyt Väinö onkin vuorossa. Siis Väinö voi kopioida Ainon voittostrategiaa, jolla hän voittaa pelin.

3) Oletetaan, että $m \geq \alpha n$, mutta $n \nmid m$. Koska α on irrationaalinen, niin itse asiassa $m > \alpha n$. Merkitään $\beta = m/n - \lfloor m/n \rfloor$ ja $k = \lfloor m/n \rfloor$. Tällöin $m = kn + \beta n$, missä $0 < \beta < 1$, sillä $n \nmid m$. Jos $1 + \beta < \alpha$ (huomaa, että $\beta \in \mathbb{Q}$ ja $\alpha \notin \mathbb{Q}$), niin $k \geq 2$, koska $m > \alpha n$, joten Aino voi poistaa m kiven kasasta $(k-1)n$ kiveä, jolloin jäljelle jää $m - (k-1)n = (1+\beta)n$ kiveä. Induktio-oletuksen mukaan Väinöllä on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}((1+\beta)n, n)$, jota Aino voi kopioida voittaakseen pelin. Jos taas $1 + \beta > \alpha$, niin Ainon kannattaa ottaa suuremmasta kasasta kn kiveä, jolloin jäljelle jää βn kiveä ja riittää varmistaa, että pelissä $\mathrm{SYT}(n, \beta n)$ Väinöllä on voittostrategia. Tämä pätee induktio-oletuksen ja sen tähden, että

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha. \quad \square$$