Matematiikan taitojen testausta monivalinnoilla

Pekka Vienonen, matematiikan ja fysiikan opettaja, Pyhäselän lukio

Millainen olisi hyvä juoksemistehtävä? Riippuu siitä, harjoitellaanko juoksemista vai mitataanko juoksunopeutta, onko kyse pikajuoksusta, kestävyysjuoksusta, maastojuoksusta, vai kenties aitajuoksusta, eukonkannosta, suunnistuksesta tai jostain muun tyyppisestä juoksemisesta.

Matematiikankin tehtäviä ja harjoituksia on moneen tarkoitukseen. Iso osa perinteisistä oppikirjan tehtävistä on pedagogisesti suunniteltu oppimisharjoitteiksi - tehtäviksi, joita tekemällä taidot kehittyvät. Vertauksena vaikkapa pikajuoksijan kuntosaliharjoittelu. Suoriutuminen harjoitustehtävistä antaa viitettä osaamisen tasosta, mutta ei pikajuoksijankaan juoksunopeutta mitata kuntosaliharjoitteilla.

Päätin vuosi sitten toteuttaa kokeilun, jossa lukion pitkän matematiikan analyyttisen geometrian kurssikoe sisältäisi pelkkiä itsensä tarkastavia tehtäviä. Sain muutaman kollegankin osallistumaan kokeiluun, kiitos heille siitä.

Oppimistehtävä vai osaamista mittaava tehtävä?

Arvioinnissa on tarve mitata osaamisen tasoa. Kokonaisuuksien hallinnan ohella voidaan mitata pienempien osa-alueiden tuntemusta, tai pulmanratkaisuun liittyvää johdonmukaista proseduurien käyttöä. Perinteisesti koetehtävinä on totuttu käyttämään oppikirjasta tuttuja oppimisharjoitteita. Opiskelijan vastauksesta opettaja on arvioinut opiskelijan taitotasoa lukemalla rivien välistä ajatuksia, joita opiskelija parhaansa mukaan on koettanut peitellä, ettei vahingossakaan paljastaisi jonkun osa-alueen puutteellista hallintaa. Vastauksen arviointi on ammattilaisen puuhaa ja vaatii laaja-alaista aineenhallintaa.

Arvioitavien tehtävien merkitys osana oppimisprosessia on perusteltua silloin, kun opiskelijalle annetaan henkilökohtainen palaute vastauksistaan. Opiskelija voi seurata omaa kehittymistään ja asettaa itsellensä tavoitteita.

Tasotestin tavoitteena ei ole asioiden oppiminen, vaan opiskelijoiden laittaminen taitojen mukaiseen järjestykseen. Loppukokeessa ei kuulu oppia, vaan osoittaa osaaminen. Tyypillinen tällainen tilanne on ylioppilaskoe. Kokelas harvoin saa yksilöllistä palautetta yo-vastauksistaan, vaikka kaksikin eri ammatti-ihmistä on ne huolella arvioinut.

Itsensä tarkastavat tehtävät (self scoring test)

Kun tehtävän tarkoitus on ainoastaan mitata omaksuttuja taitoja, riittää, että tehtävä mittaa jotain, joka korreloi mitattavan taidon kanssa. Lienee selvää, ettei kaikkea matematiikan osaamista voi automaattisilla itsensä tarkastavilla tehtävillä mitata, mutta kaikki, minkä voi, tullaan ennen pitkää sellaisilla mittamaan. Vastausten arvioinnista säästyvä aika jää opettamiseen ja ohjaukseen.

Monivalintatehtäviin kohdistuva kritiikki selittynee osittain puutteellisella tehtävän käyttötarkoituksen pohdinnalla. Turhaa debattia vältetään selvittämällä aluksi, että kyseessä on tasotesti, ei oppimisharjoite. Ymmärrettävää on myös huoli siitä, että testin voisi läpäistä pelkällä arvaamisella osaamatta mitään.

Kaikesta huolimatta kissa on nyt pöydällä, kun sähköinen koeympäristö on rantautunut kouluihin ja automaattisen testauksen mahdollistava infrastruktuuri on olemassa. Uudentyyppinen koeympäristö vaatii uudentyyppiset kysymykset, eikä tässä yhteydessä ole tarpeen sivuuttaa monivalintatehtäviä yhtenä mahdollisuutena testata osaamista. Haasteita niihin varmasti liittyy, mutta sähköisessä koeympäristössä matemaattisten taitojen testaus perinteisilläkin koetehtävillä on vähintäänkin haasteellista, joissain tapauksissa jopa mahdotonta. Tietokoneavusteinen symbolinen laskenta (CAS) torpedoi monet aiemmin testaukseenkin hyvin soveltuneet tehtävätyypit.

Enää ei voida käyttää koetehtävinä sellaisia tuttuja ja turvallisia harjoitustehtäviä kuin sievennä lauseke, ratkaise yhtälö, laske raja-arvo, muodosta funktion derivaattafunktio, tai etsi funktion suurin ja pienin arvo. Perinteisten tehtävien yhteensopivuutta sähköiseen kokeeseen voidaan parantaa pienellä ehostuksella, mutta monia asioita voi mitata myös itsensä tarkastavilla monivalintatehtävillä.

Perinteisen tehtävän muokkaaminen monivalinnoiksi

Ajatuksenani on, että opiskelija ratkaisee tehtävän suttupaperille tai tietokeella, mutta tuotosta ei arvioida. Sen sijaan opiskelijalta kysytään kustakin tehtävästä muutama monivalintakysymys ja vastausten perusteella pyritään hahmottamaan, kuinka hyvin ratkaisuun vaadittavia osa-alueita opiskelija on onnistuneesti selvittänyt.

Kysymysten suunnittelu alkaa siitä, että tehtävän laatija ratkaisee tehtävän pohtien samalla vaihtoehtoisia ratkaisutapoja. Sen jälkeen analysoi huolellisesti, mitä osaamista missäkin vaiheessa tarvittiin, mitä välituloksia mahdollisesti muodostui ja lopuksi ideoi näihin liittyviä kysymyksiä tai väittämiä, joihin opiskelija tehtävässä vastaa.

- Tutustu huolellisesti alkuperäiseen tehtävään
- Ratkaise se ja tarkastele prosessia vaihe vaiheelta (mitä taitoja tarvittiin)
- Suunnittele monivalintakysymykset ratkaisuprosessin vaiheita mukaillen

Analyyttisen geometrian Abittikoe pelkillä monivalintakysymyksillä

Ensimmäinen koetehtävä johdatteli uudentyyppiseen tapaan vastata kokeeseen.

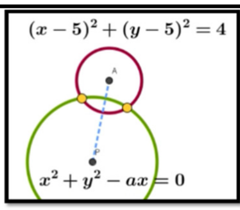
Määritä pisteen $(1, 1)$ lyhin etäisyys ympyrän $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ kehästä ja valitse väittämiin mielestäsi oikea vaihtoehto.

a) Lyhin etäisyys on **pienempi kuin yksi / tasan yksi / suurempi kuin yksi**
b) Piste (1, 1) sijaitsee ympyrän **sisäpuolella / kehällä / ulkopuolella**

Kuva 1. Tehtävän sanamuoto on muotoiltu sellaiseksi, ettei sitä voi suoraan ratkaista symbolisella laskinohjelmalla. Parilla kysymyksellä saadaan osviittaa opiskelijan suoriutumisesta.

Yhdessä tehtävässä oli liikkuva kuva, jolla havainnollistettiin visuaalisesti parametrin vaikutusta annetussa ympyrän yhtälössä.

Määritä parametri a siten, että ympyrä $x^2 + y^2 - ax = 0$ sivuaa ympyrää $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 4.$



a) Liikkuvan ympyrän keskipiste on *$(-a, 0)$ / $(a, 0)$ / $(a/2, 0)$ / $(-a/2, 0)$ / Jotain muuta*
b) Liikkuvan ympyrän halkaisija on *a / a/2 / a/4 / Jotain muuta*
c) Monellako eri tavalla ympyrät voivat sivuta? *Yhdellä / Kahdella / Äärettömällä / Ne eivät voi sivuta lainkaan*
d) Esittääkö lauseke $\sqrt{\left(\frac{a}{2}-5\right)^2 + (0-5)^2}$ pisteiden $(a/2, 0)$ ja $(5, 5)$ välisen janan pituutta? *Kyllä / Ei*
e) Sivuamispiste on aina keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla. *Kyllä / Ei*
f) Jos keskipisteiden välinen etäisyys on yhtä suuri kuin säteiden summa, ympyrät sivuavat. *Kyllä / Ei*
g) Jos keskipisteiden välinen etäisyys on yhtä suuri kuin suuremman ja pienemmän sateen välinen erotus, niin ympyrät sivuavat. *Kyllä / Ei*
h) Annetut ympyrät sivuavat toisiaan, kun *a = 46/7 tai a = 46/3 / a = 46/7 / a = 46/3 / Jotain muuta*

Kuva 2. Tehtävän voi ratkaista usealla lähestymistavalla ja siksi kysymyksetkin on muotoiltu palvelemaan eri ratkaisutapoja. Väittämillä annetaan vinkkejä eri tapoihin ajatella sivuamistilannetta ja johdatellaan opiskelijaa ratkaisun polulle.

Yhteensä kokeessa oli kymmenen tehtävää, joissa jokaisessa oli vaihteleva määrä monivalintakysymyksiä.

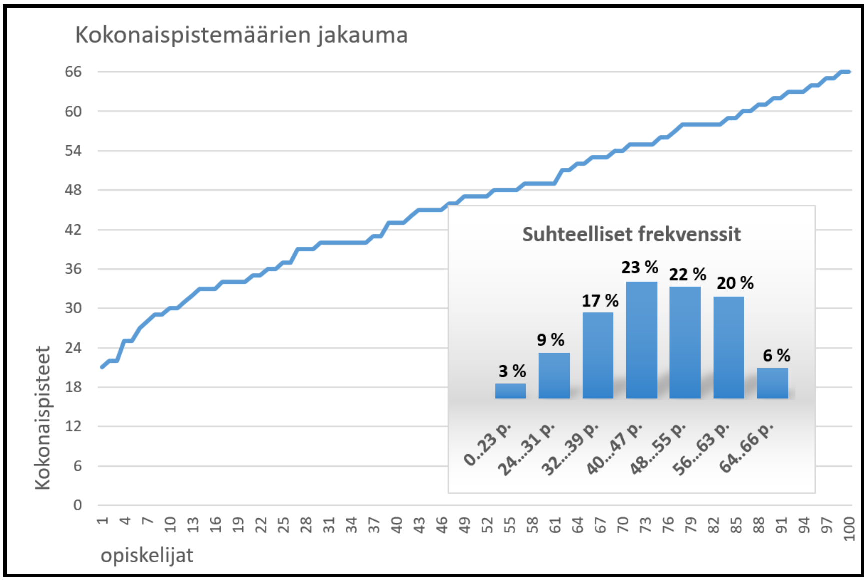
Tulosten tarkastelu

Analyyttisen geometrian sähköiseen monivalintakokeeseen osallistui 100 opiskelijaa kolmesta eri lukiosta. Opiskelijoiden saamien kokonaispistemäärien ja tehtäväkohtaisten pistemäärien jakaumia analysoitiin ja pistemääriä verrattiin opettajilta saatuihin subjektiivisiin arvioihin opiskelijoiden taidoista.

- Pelkkiä monivalintatehtäviä, automaattinen pisteytys
- 100 opiskelijaa, 6 eri opetusryhmää
- 4 eri opettajaa, 3 eri lukiota

Kokonaispistemäärien jakauma

Kokonaispistemäärien jakauma osoittaa, että koe laittoi osallistujat johonkin järjestykseen. Suhteellisia frekvenssejä on tarkasteltu seitsenportaisella asteikolla, koska sellainen on yleisesti käytössä arvosteluasteikkona suomalaisissa lukioissa (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) ja ylioppilastutkinnossa (I, A, B, C, M, E, L). Alimman luokan ylärajan (23 p.) yhteydessä mainittakoon, että puhtaan arvauksen pistemäärän odotusarvo oli kyseisessä kokeessa 21,7 pistettä. Jos Abittikokeeessa olisi mahdollista antaa vääristä vastauksista miinuspisteitä, voisi pisteytyksen laatia niinkin, että arvaamalla saa odotusarvoisesti nolla pistettä. Toisaalta, sillä ei tässä tapauksessa olisi kuin kosmeettinen vaikutus, koska alin luokka voidaan aina laajentaa kattamaan pistemäärät nollasta arvausrajaan saakka, ja muutaman pisteen sen yli.

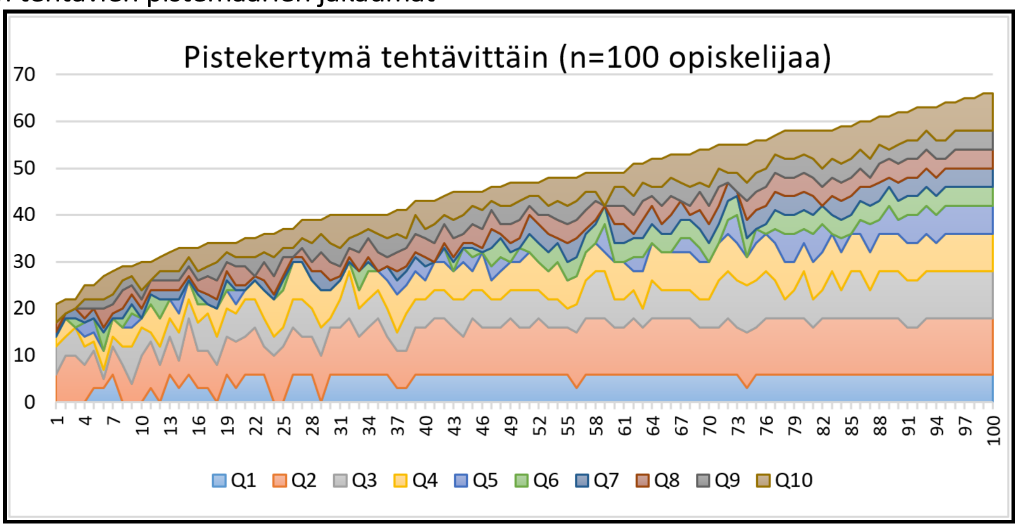


Kuva 3. Testin pistemäärien jakauma. Alin pistemäärä oli 21 pistettä ja ylin 66 pistettä, joka oli myös kokeen maksimipistemäärä. Asteikkona seitsenportainen asteikko ja alin ja ylin luokka ovat "puolikkaita" luokkia.

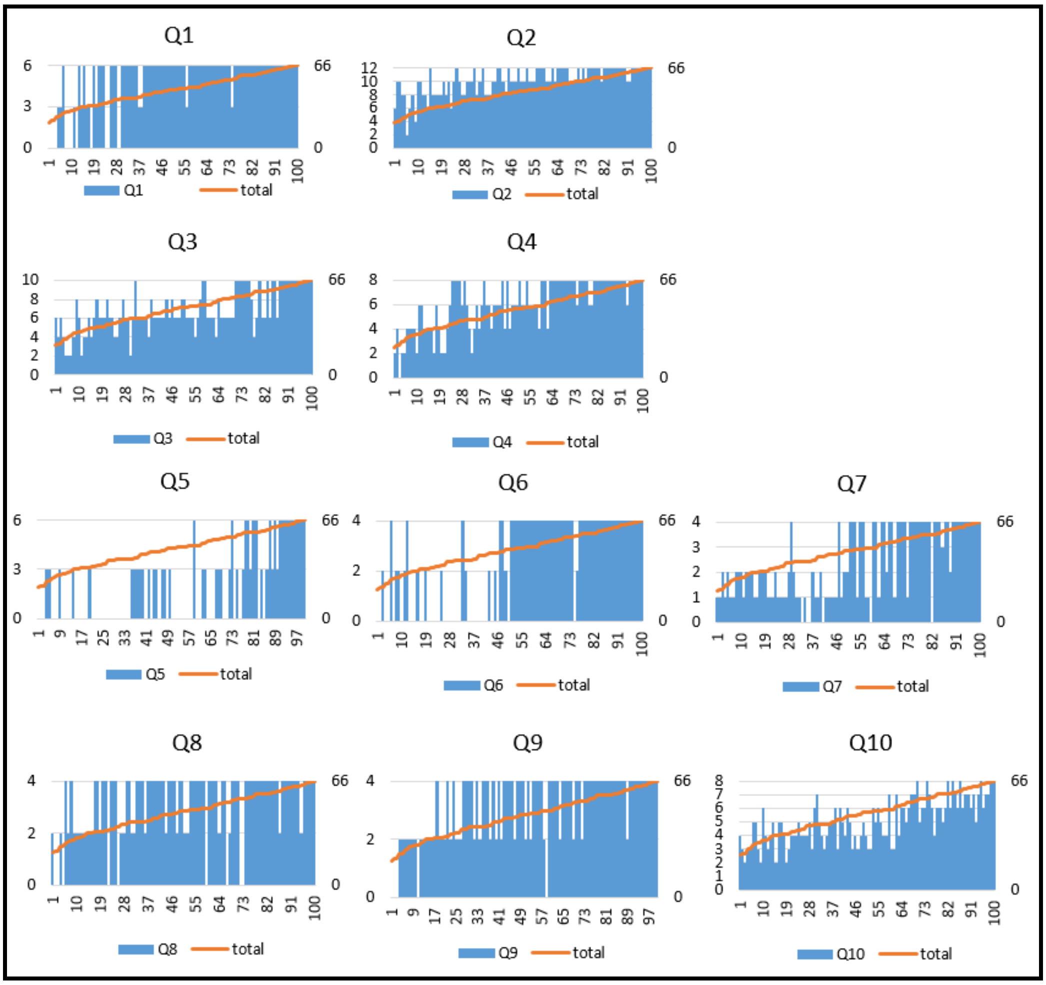
Testistä automaattisesti saatua tasavälein laadittua frekvenssijakaumaa voi leikkimielisesti verrata ylioppilastutkinnon arvosanojen "väkivaltaisesti muokattuun" jakaumaan, jonka määräytymisestä on kuvailtu lautakunnan verkkosivuilla seuraavasti:

"Ylioppilastutkintolautakunta päättää arvosanojen pisterajat, kun arvostelutyö on saatu päätökseen, kullakin tutkintokerralla erikseen. Kokeista annetaan arvosanoja jotakuinkin seuraavasti: L 5 %, E 15 %, M 20 %, C 24 %, B 20 %, A 11 %, I 5 %. Arvosanojen suhteelliset osuudet vaihtelevat jonkin verran eri kokeissa ja eri tutkintokerroilla." (lähde: https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/pisterajat, luettu 16.3.2017)

Yksittäisten tehtävien pistemäärien jakaumat



Kuva 4. Kokonaispistemäärän kertymä tehtävittäin. Yksittäisten tehtävien pistejakaumat noudattelivat kokonaispistemäärän jakaumaa, joten tehtävät mittasivat enemmän tai vähemmän jotain samaa asiaa.



Kuva 5. Tehtäväkohtaisia pistemääriä vertailtiin kokonaispisteisiin.

Mitä jäi käteen?

Kokeiluun osallistuneiden opettajien palautteissa korostui yllättävänä helpotuksena se, ettei koevastauksia tarvinnut arvioida käsin. Vasta asian konkretisoiduttua sellaisesta osasi nauttia. Vaikka tehtävien laatiminen vaatiikin alussa aiempaan verrattuna enemmän aikaa ja vaivaa, automaattinen tarkistus palkitsee laatijansa moninkertaisesti. Nyt vuotta myöhemmin ja satoja tehtäviä laadittuani olen havainnut, ettei itsensä tarkastavien matematiikan tehtävien laatiminen CAS-ympäristöön tunnu enää niin työläältä kuin ennen. Suosittelen rohkeasti kokeilemaan. Ja mikä parasta, opiskelijalle vastaaminen on helppoa, eikä vaadi tietoteknisiä erityistaitoja tai kaavaeditoria.

Lopuksi vielä monia askarruttavaan aiheeseen: mitä osaamista koe mittasi? Ajattelin, että mikäli tehtävät mittasivat matematiikan osaamista, tulisi kokeen kokonaispistemäärien korreloida opettajilta saatujen subjektiivisten arviointien kanssa. Tätäkin tutkittiin ja osoittautui, että korrelaatiota oli.

Monivalintakysymyksillä voi näköjään testata muutakin, kuin mikä eläin olit edellisessä elämässäsi, kuka supersankari olisit, tai miltä ystäväsi näyttää kolmenkymmenen vuoden päästä.

(Julkaistu Dimensio -lehdessä 3/2017)