

Peruskoulun matematiikkakilpailu

Alkukilpailu 29.10 – 9.11.2018



Työskentelyaika 45 minuuttia. Ratkaise tehtävät 1-3 tehtäväpaperiin. Muiden tehtävien ratkaisut tulee tehdä erilliselle vastauspaperille.

Perustelee laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Palauta tämä tehtäväpaperi vastauspaperisi mukana. Laskinta ei saa käyttää. Sallitut välineet: lyijykynä, viivoitin, pyyhekumi.

Nimi: _____

Email: _____

Koulu: _____

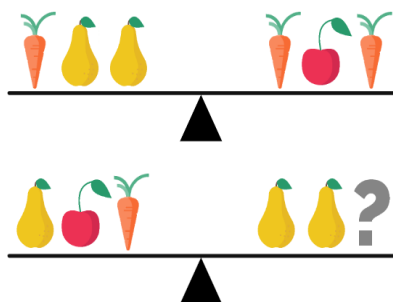
Opettaja: _____

Luokkataso: 7 / 8 / 9

Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	8	Yht.
Max.	6	6	6	4	6	6	6	6	46
Pisteet									

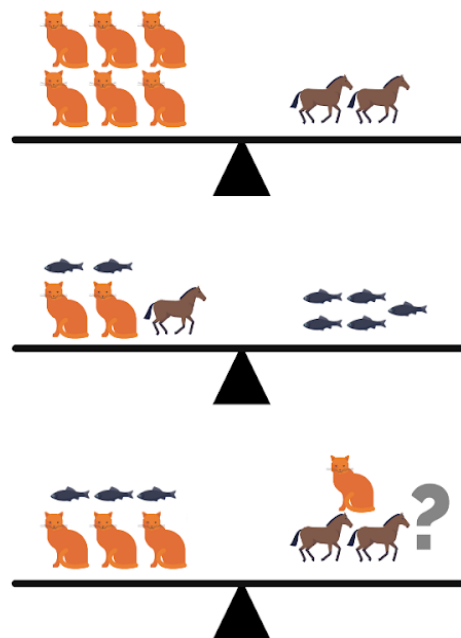
1. Päättele, mitä alimmalta vaa'alta puuttuu. Tässä tehtävässä pelkkä vastaus riittää.

a. [2p]



? =

b. [4p]



? =

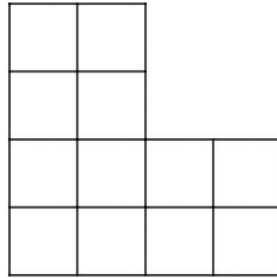
2. a. Olli seisoo klo 10.20 bussipysäkillä ja huomaa bussien T ja X tulevan samaan aikaan pysäkillä. Bussi T saapuu pysäkillä 9 minuutin välein ja bussi X 12 minuutin välein.

Mihin aikaan bussit tulevat pysäkillä seuraavan kerran samaan aikaan?

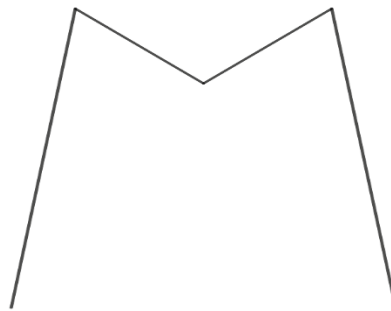
2. b. Janne odottaa bussia toisella pysäkillä ja yllättyy havaitessaan bussien A, H ja W tulevan pysäkille samaan aikaan. Kello on tällöin 8.23. Bussi A kulkee 5 minuutin, H 7 minuutin ja W 11 minuutin välein.

Mihin aikaan bussit tulevat pysäkille seuraavan kerran samaan aikaan?

3. a. Jaa kuvan alue neljään yhdenmuotoiseen ja yhtä suureen osaan.



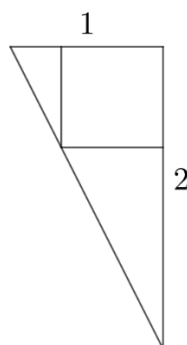
- b. Muodosta kuvan M-kirjaimeen kolmella suoralla 9 erillistä kolmiota.



4. A ja B ovat positiivisia kokonaislukuja. Mitä luvut A ja B voivat olla? Etsi kaikki mahdolliset ratkaisut ja perustele, miksi muita ratkaisuja ei ole.

$$A^A \cdot B + A \cdot B = 150$$

5. Matematiikan kokeessa 80 % ajasta ikkuna oli auki, 50 % ajasta valot olivat pois päältä ja 90 % ajasta ulkona satoi. Kuinka suuren osan ajasta vähintään nämä kaikki tapahtuivat yhtä aikaa?
6. Laske neliön pinta-alan tarkka arvo, kun suorakulmaisen kolmion kanta on 1 ja korkeus 2.



7. Heidi ei ollut koskaan täysin ymmärtänyt jalkapallo-otteluiden pisteytystä. Hänen mielestään joukkueelle tulisi antaa voitosta 10 pistettä ja jokaisesta tehdystä maalista 1 piste, riippumatta ottelun lopputuloksesta. Näin vältettäisiin tylsiä tasapelejä.

Heidin pisteytystä kokeiltiin kolmen joukkueen (A, B ja C) turnauksessa. Jokainen joukkue teki ainakin yhden maalin jokaisessa pelissä ja joukkueet pelasivat keskenään yhden kerran.

Pisteitä joukkueille kertyi seuraavasti: A: 16, B: 13 ja C: 5

Päättele otteluiden tulokset. Perustele ratkaisusi.

8. Pitkien summalausekkeiden merkintään on kehitetty merkintä Σ (*sigma*). Esimerkiksi:

$$\sum_{n=1}^4 2n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20$$

Laske välivaiheineen:

a.

$$\sum_{n=2}^5 3n$$

b.

$$\sum_{n=1}^5 n^3$$

c.

$$\sum_{n=1}^6 \frac{1}{n}$$

Grundskolans matematiktävling

29.10 – 9.11.2018



Provtid 45 minuter. Uppgifterna 1-3 svaras på uppgiftspappret. Alla andra uppgifter görs på ett skilt konceptpapper.

Motivera med beräkningsuttryck, ritning eller förklaring. Lämna in detta uppgiftspapper med ditt konceptpapper. Räknare får ej användas. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi.

Namn: _____

e-post: _____

Skola: _____

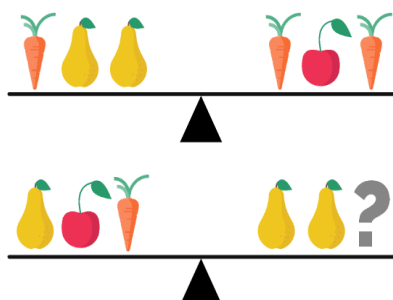
Lärare: _____

Årskurs: 7 / 8 / 9

Uppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	Tot.
Max.	6	6	6	4	6	6	6	6	46
Poäng									

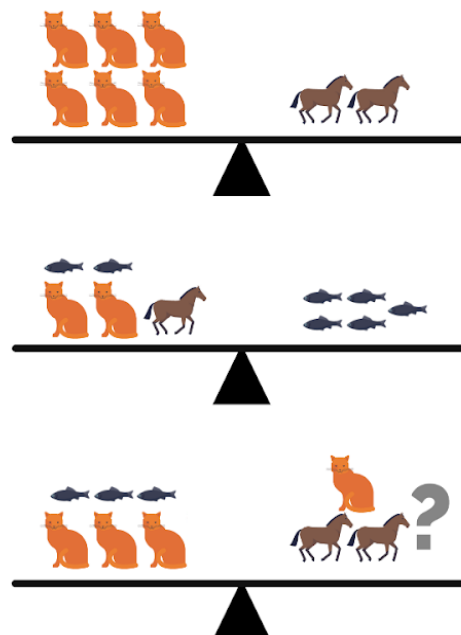
1. Lista ut vad som fattas på den nedersta vågen. Bara ett svar räcker in den här uppgiften.

a. [2p]



? =

b. [4p]



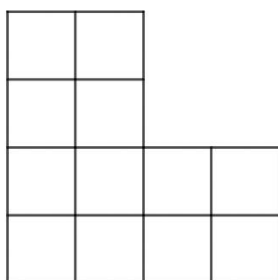
? =

2. a. Olli står kl. 10.20 vid en busshållplats och märker att bussarna T och X anländer samtidigt till hållplatsen. Buss T anländer till hållplatsen med 9 minuters mellanrum och buss X med 12 minuters mellanrum.

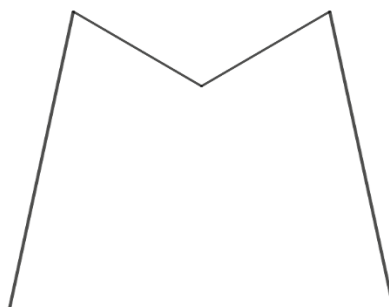
Vilken tid anländer bussarna samtidigt till hållplatsen nästa gång?

2. b. Janne väntar på en buss vid en annan hållplats och märker till sin förvåning att bussarna A, H och W anländer alla tre samtidigt till hållplatsen. Klockan är då 8.23. Buss A anländer med 5 minuters mellanrum, buss H med 7 minuters mellanrum och buss W med 11 minuters mellanrum. Vilken tid anländer bussarna till hållplatsen samtidigt nästa gång?

3. a. Dela figurens område i fyra lika stora likformiga delar.



- b. Konstruera 9 trianglar i M-figuren genom att rita tre linjer. Trianglarna ska inte befina sig inuti varandra.

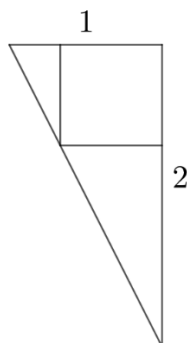


4. A och B är positiva heltal. Vilka heltal kan A och B vara i uttrycket nedan? Hitta alla möjliga lösningar och motivera varför det inte existerar övriga lösningar.

$$A^A \cdot B + A \cdot B = 150$$

5. Under ett matematikprov var fönstret öppet under 80 % av tiden, under 50 % av tiden var lamporna släckta och under 90 % av tiden regnade det ute. Åtminstone under en hur stor del av tiden inträffade alla tre händelserna samtidigt?

6. Räkna ut ett exakt värde för kvadratens area, då den rätvinkliga triangelns bas är 1 och höjd 2.



7. Heidi hade aldrig riktigt förstått hur poängräkningen sker vid fotbollsmatcher. Enligt henne borde ett lag få 10 poäng för en vinst, och 1 poäng för varje gjort mål oberoende av slutresultatet. På detta sätt skulle man undvika tråkiga oavgjorda resultat.

Heidis poängräkning testades i en turnering där tre lag (A, B och C) spelade. Varje lag gjorde åtminstone ett mål i varje match och lagen spelade mot varandra en gång.

Poängfördelningen blev följande: A: 16, B: 13 och C: 5

Lista ut hur matcherna slutade. Motivera ditt svar.

8. För att beskriva långa summauttryck har man utvecklat beteckningen Σ (sigma). Till exempel:

$$\sum_{n=1}^4 2n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20$$

Räkna med mellansteg:

a.

$$\sum_{n=2}^5 3n$$

b.

$$\sum_{n=1}^5 n^3$$

c.

$$\sum_{n=1}^6 \frac{1}{n}$$

Mathematics competition in Finnish comprehensive school 29.10 – 9.11.2018



The time allotted is 45 minutes. Using a calculator is not allowed. You can use a pencil, a ruler, an eraser. **Remember to provide explanation** with pictures, equations or in words. You should write your solutions for tasks 1-3 on this paper, and for tasks 4-8 on the separate sheet. Return this paper even if you have not written anything on it.

Name: _____

email: _____

School: _____

Teacher: _____

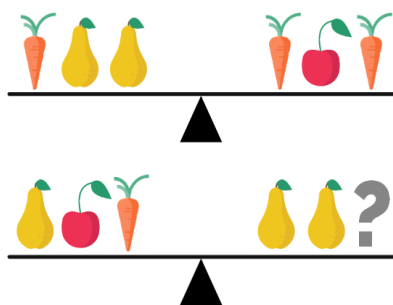
Grade: 7 / 8 / 9

Task	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Max.	6	6	6	4	6	6	6	6	46
Points									

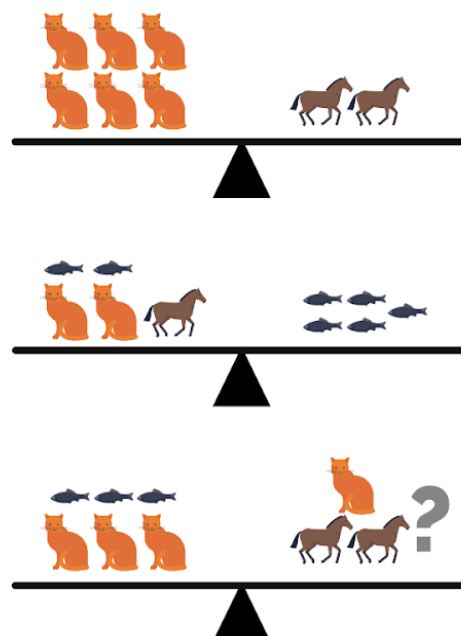
1. Find the item missing from the lowest scale. In this task, only the answer is required.

a. [2p]

b. [4p]



? =



? =

2. a. Olli is standing on a bus stop at 10:20. He notices that buses T and X arrive at this stop at the same time. According to their schedules, buses of route T arrive every 9 minutes and buses of route X every 12 minutes.

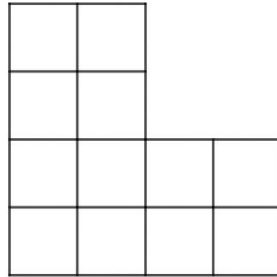
Find the next point of time the buses T and X arrive at this bus stop at the same time.

2. b. Janne is waiting for a bus on another bus stop. He is surprised to observe that buses of routes A, H, and W all arrive at this bus stop at 8:23. According to their schedules, buses of route A arrive at

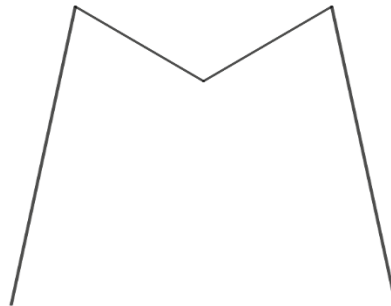
this stop every 5 minutes, buses of route H every 7 minutes, and buses of route W every 11 minutes.

Find the next point of time the buses A, H, and W arrive at this bus stop at the same time.

3. a. Divide the figure below into four similar parts of the same size.



- b. Using three lines, form 9 separate triangles in the figure below.

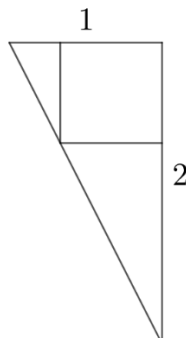


4. Suppose A and B are positive whole numbers that satisfy:

$$A^A \cdot B + A \cdot B = 150$$

What numbers can A and B be replaced by? Find all possible solutions and give a reasoning as to why no other solutions besides your own exist.

5. During a math test, the window was open 80 % of the time, lights were on 50 % of the time, and it rained outside 90 % of the time. Find the minimal percentage of time these three events took place simultaneously.
6. Find the exact area of the square in the figure below, given that the base of the triangle is 1 and the height of the triangle is 2.



7. Heidi has never completely understood how teams are given points in soccer competitions. In her opinion, a win should grant a team 10 points, and each scored goal should grant 1 point regardless of the outcome of the match. This would prevent a match ending in a boring draw. Heidi's point system was applied in a tournament with teams A, B, and C competing. Each of these teams scored at least one goal in each of the matches, and each of the teams played against all other teams once.

The scoreboard was A: 16, B: 13, C:5.

Find the outcomes of each match in this tournament. Justify your answer.

8. In order to write long summations in simpler form, mathematicians have invented the Σ (*sigma*) notation. For instance,

$$\sum_{n=1}^4 2n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20$$

Find the following sums. Show your work.

d.

$$\sum_{n=2}^5 3n$$

e.

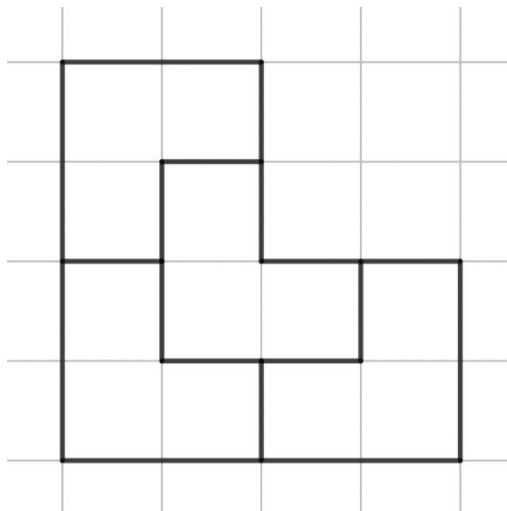
$$\sum_{n=1}^5 n^3$$

f.

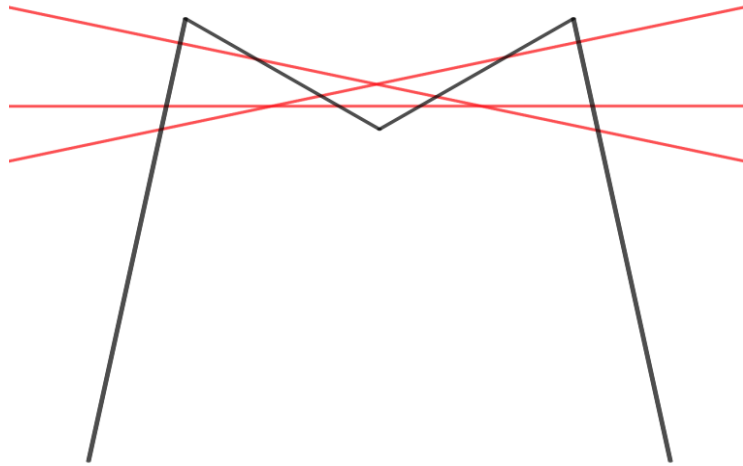
$$\sum_{n=1}^6 \frac{1}{n}$$

Vastaukset ja pisteytysohjeet

1. a. Kun 1. vaa'asta poistetaan kummaltakin puolelta porkkana, saadaan 2 päärynää = kirsikka + porkkana.
Kun toisesta vaa'asta poistetaan kummaltakin puolelta päärynä, saadaan kirsikka + porkkana = päärynä + ?.
? on siis päärynä.
V: Vaa'alta puuttuu päärynä. **Vastauksesta 2p.**
- b. 1. vaa'an perusteella hevonen = 3 kissaa.
Poistetaan 2. vaa'asta kummaltakin puolelta 2 kalaa ja sijoitetaan hevosen paikalle 3 kissaa.
Saadaan: 5 kissaa = 3 kalaa.
Sijoitetaan 3. vaakaan kalojen paikalle yhteensä 5 kissaa ja hevosten paikalle yhteensä 6 kissaa.
Saadaan:
8 kissaa = 7 kissaa + ?.
? on siis kissa.
V: Vaa'alta puuttuu kissa. **Vastauksesta 4p.**
2. a. Ratkaisumalleja:
- Bussi T saapuu pysäkillä 9, 18, 27, 36, ... minuutin kuluttua. ($\frac{1}{2}$ p)
Bussi X saapuu 12, 24, 36, ... minuutin kuluttua. ($+\frac{1}{2}$ p)
Seuraavan kerran ne saapuvat pysäkillä samaan aikaan 36 minuutin kuluttua (**+1**) eli klo 10.56. (**+1 p**)
V: klo 10.56
 - Jaetaan luvut alkutekijöihin $9 = 3 \cdot 3$ ja $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ (**+1p**)
Näiden pienin yhteinen jaettava on $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ (**+1p**), joten bussit saapuvat pysäkillä seuraavan kerran samaan aikaan klo 10.56 (**+1p**)
- b. Pienin luku, joka on jaollinen luvuilla 5, 7 ja 11, on $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, (**1½ p**)
joten bussit saapuvat pysäkillä samaan aikaan 385 min = 6 h 25 min kuluttua (**+1 p**) eli klo 14.48.
(**+½ p**)
V: klo 14.48
3. a. Oikeasta ratkaisusta **2p.**



3. b. Oikeasta ratkaisusta **4p**. Jos yksi kolmio puuttuu, **2p**. Jos kaksi kolmiota puuttuu, **0p**.



4. **3p = 3 · 1p** oikeasta ratkaisusta:

$A=1, B=75$ (perustelu esimerkiksi kokeilulla/yhtälöllä)

$$11B + 1B = 150$$

$$2B = 150$$

$$B = 75$$

Tai suoraan $11 \cdot 75 + 1 \cdot 75 = 150$

$A = 2, B = 25$

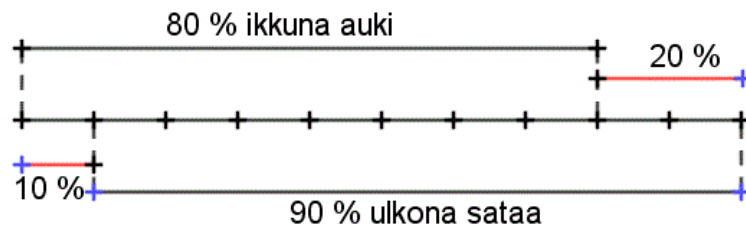
$A = 3, B = 5$ (vastaavin perustelu kuin $A = 1$ ja $B = 150$)

1p $4^4 = 256 > 150$, joten B:lle ei ole kokonaislukuratkaisua, kun $A \geq 4$ tai vastaava perustelu yhtälön avulla.

Pelkät oikeat vastaukset ilman perusteluja: **2p**

5. Ratkaisumalleja:

- Sijoitetaan koeaikaa kuvaavalle aikajanalle mahdollisimman erilleen toisistaan osuus, jolloin ikkuna oli auki, ja osuus, jolloin ulkona satoi. (**3 p**)



50%:n osuudesta, jolloin valot olivat pois päältä, enintään $10\% + 20\% = 30\%$ voi sijoittua niin, etteivät kaikki kolme tapahtumaa tapahdu samaan aikaan. (**+2 p**)

Näin ollen kaikki 3 tapahtuvat samaan aikaan vähintään $50\% - 30\% = 20\%$ ajasta. (**+1p**)

V: 20 %

- Toinen ratkaisu:
ikkuna + valot = $50\% + 80\% = 130\%$ → pakko olla 30% samaan aikaan (**3p**)
(ikkuna+valot)+sade = $30\% + 90\% = 120\%$ → pakko olla 20% samaan aikaan (**3p**)
- Muu vastaava perusteltu ratkaisu **6p**
Mahdolliset pistevähennykset opettajan harkinnan mukaan
- Pelkkä oikea vastaus ilman perusteluja: **2p**

6. Ratkaisumalleja:

- Merkitään neliön sivun pituutta muuttujalla x .
Alkuperäinen kolmio ja sen alaosaan muodostunut kolmio ovat yhdenmuotoiset. **(1 p)** Vastinjanojen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret, joten

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2-x} \quad \textbf{(+1 p)}$$

$$2x = 2 - x \quad \textbf{(+1 p)}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \textbf{(+1 p)}$$

$$\text{Neliön pinta-ala on } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \textbf{(+2 p)}$$

$$V: \frac{4}{9}$$

- Pinta-aloilla saadaan yhtälö:

$$\frac{(1-x)x}{2} + \frac{(2-x)x}{2} + x^2 = 1 \quad \textbf{(2p)}$$

$$(1-x)x + x(2-x) + 2x^2 = 2 \quad \textbf{(1p)}$$

$$3x = 2 \quad \textbf{(1p)}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \textbf{(1p)}$$

$$\text{ala} = \frac{4}{9} \quad \textbf{(1p)}$$

- Samankohtaisilla kulmilla: $\tan \beta = 2$
toisaalta $\tan \beta = \frac{x-2}{2} \quad \textbf{(2p)}$

$$2 = \frac{x-2}{2} \quad \textbf{(+2p)}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \textbf{(+1p)}$$

$$\text{ala} = \frac{4}{9} \quad \textbf{(+1p)}$$

- Pelkkä vastaus: **1p**

7. Ottelut: AB, AC ja BC

Lopputulos #1:

AC: 5-4, BC: 2-1, AB: 1-1

C: häviää molemmat, koska pisteitä alle 10

AC → A voittaa

BC → B voittaa

(1,5p)

Yksikään ei voita molempia otteluitaan, koska yhdelläkään joukkueella ei yli 20p:

AB → tasapeli

(+1,5p)

Pisteet ennen maalien huomiointia A=10, B=10, C=0 →

A:n tehtävä 6 maalia, B:n 3 ja C:n 5, josta kokeilemalla:

AC: 5-4 **(½p + ½p)**

BC: 2-1 **(½p + ½p)**

AB: 1-1 **(½p + ½p)**

Lopputulos #2:

AC: 4-4, BC: 2-1, AB: 2-1

Tarkennuksena: jokaisesta oikein lasketusta maalien määrästä **+0,5p** eli kummasta tahansa otteluiden tuloksista yhteensä siis **3p**.

Muu perusteltu ratkaisu, esim. kokeilun näyttäminen **(6p)**
Pelkkä vastaus **(3p)**

8. a. Merkintä tarkoittaa summaa

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \quad \mathbf{(1\ p)} \\ & = 6 + 9 + 12 + 15 \quad \mathbf{(+\frac{1}{2}\ p)} \\ & = 42 \quad \mathbf{(+\frac{1}{2}\ p)} \end{aligned}$$

b. Merkintä tarkoittaa summaa

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \quad \mathbf{(1\ p)} \\ & = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \quad \mathbf{(+\frac{1}{2}\ p)} \\ & = 225 \quad \mathbf{(+\frac{1}{2}\ p)} \end{aligned}$$

c. Merkintä tarkoittaa summaa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \mathbf{(\frac{1}{2}\ p)} \\ & = 1 + \frac{30}{60} + \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60} \quad \mathbf{(+1\ p)} \\ & = \frac{147}{60} = 2 \frac{27}{60} \quad \mathbf{(+\frac{1}{2}\ p)} \end{aligned}$$