B1-osan tehtävä pitkä matematiikka

8.

Looginen algebra muodostuu joukosta B={0,1} ja kolmesta operaatiosta yhteenlasku (+), kertolasku (·) ja komplementti (-), jotka määritellään seuraavasti

0+0=0	0·0=0	- 0=1
0+1=1	0·1=0	- 1=0
1+0=1	1·0=0	
1+1=1	1·1=1	

Yhteenlasku vastaa disjunktiota, kertolasku konjunktiota ja komplementti negaatiota.Voidaan osoittaa, että loogisessa algebrassa on voimassa liitäntä, osittelu ja vaihdantalait.

Loogisen algebran avulla voidaan laskea nopeammin monimutkaisten yhdistettyjen lauseiden totuusarvoja kuin totuustauluja tekemällä, kunhan vain muistaa, milloin laskusäännöt eroavat kokonaisluvuilla 0 ja 1 laskemisesta ja milloin taas voidaan soveltaa kokonaislukulaskentaa.

Esimerkiksi lausekkeen $\neg A \wedge (B \vee A)$ totuusarvo, kun A on epätosi ja B on tosi, saadaan selville loogisen algebran merkinnöillä laskemalla -0·(1+0) = 1·1=1, josta nähdään että lause on tosi.

a) Määritä loogisen algebran merkintöjä käyttäen lauseen $((A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee (\neg B)$ totuusarvo, kun A on tosi ja B on epätösi. (2p.)

b) Esitä $A \Leftrightarrow B$ käyttäen loogisen algebran merkintöjä +, · ja -. (4p.)

c) Aineisto välilehdeltä löydät TI-Nspire™ CAS /TI-Nspire™ CX CAS Sovelluksen käsikirjan.
i) Laske a-kohdan lausekkeen $((A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee (\neg B)$ totuusarvo em. sovelluksella käyttäen sovelluksen loogisen algebran operaattoreita eli Boolean operaattoreita and, or ja not. Palauta kuvankaappaus laskustasi. (2p.)
ii) Esitä b-kohdan lauseke $A \Leftrightarrow B$ käyttäen sovelluksen Boolean operaattoreita and, or ja not. Tarkista tuloksesi sovelluksella käymällä läpi kaikki A:n ja B:n arvoyhdistelmät eli laatimalla totuustaulu. Taulun ei tarvitse olla taulukkomuotoinen. (4p.)

B2-osan tehtävä pitkä matematiikka

13.

Olkoon B joukko, missä on määritelty operaatiot +,· ja -. Joukko B operaatioineen on Boolen algebra, jos seuraavat kymmenen ehtoa ovat voimassa kaikille $x, y, z \in B$

1. x+(y+z)=(x+y)+z

2. x·(y·z)=(x·y)·z

3. x+y=y+x

4. x·y=y·x

5. $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$
6. $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
7. $x+0=x$
8. $x\cdot 1=x$
9. $x+(-x)=1$
10. $x\cdot(-x)=0$

Alkiota 0 kutsutaan nolla-alkioksi ja alkiota 1 ykkösalkioksi.

Esimerkki

Osoita, että Boolen algebrassa $x + x = x$.

Todistus

$x + x = (x+x)\cdot 1 = (x+x)\cdot(x + (-x)) =x + (x\cdot(-x)) = x + 0 =x$

Todista, että Boolen algebrassa

a) $x\cdot x=x$

b) $x+1=1$

c) $x\cdot 0=0$

Sievennä käyttäen edellä lueteltuja kymmentä ehtoa ja kohtien a,b ja c tulosten avulla

d) $x\cdot x + x\cdot x$

e) $x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$

f) $(a+b)\cdot(a+c)$