



MAOL peruskoulun matematiikkakilpailut

Loppukilpailut 18.1.2019

Sisällysluettelo

MAOL peruskoulun matematiikkakilpailut	1
Peruskoulun matematiikkakilpailu	2
Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019	2
Osa A	2
Peruskoulun matematiikkakilpailu	5
Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019	5
Osa B	5
Peruskoulun matematiikkakilpailu	6
Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019	6
Osa C	6
Mathematics competition, comprehensive school	8
Final round, Friday 18 th , January 2019	8
Part A.....	8
Mathematics competition, comprehensive school	11
Final round, Friday 18 th , January 2019	11
Part B.....	11
Mathematics competition, comprehensive school	12
Final round, Friday 18 th , January 2019	12
Part C.....	12

Peruskoulun matematiikkakilpailu

Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019

Osa A

Työskentelyaika 30 minuuttia. Ratkaise kaikki tehtävät tähän paperiin. Vain tämä paperi arvostellaan.

Perustele laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Laskinta ei saa käyttää. Sallitut välineet: lyijykynä, viivoitin, pyyhkumi.

Nimi:

Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	Yht.
Max.	2	2	2	2	2	2	2	14
Pisteet								

1. Ratkaise kynän hinta annettujen tietojen perusteella.

$$\text{Kynä} + \text{Kirja} = 1,10 \text{ €}$$

$$\text{Kirja} = \text{Kynä} + 1,00 \text{ €}$$

$$\text{Kynä} = ?$$

/2

2. Osoita, että luku $10^{2019} - 10^{2017}$ on jaollinen kolmella peräkkäisellä ykköistä suuremmalla positiivisella kokonaisluvulla.

/2

3. Mikä on seuraava jäsen lukujonossa 1, 3, 5, 2, 6, 8, 5, 15, 17, 14, ?

/2

4. Binomin neliönä tunnetun kaavan mukaan:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Laske tätä hyödyntäen

a. 99^2

b. 999^2

c. $999\,999^2$

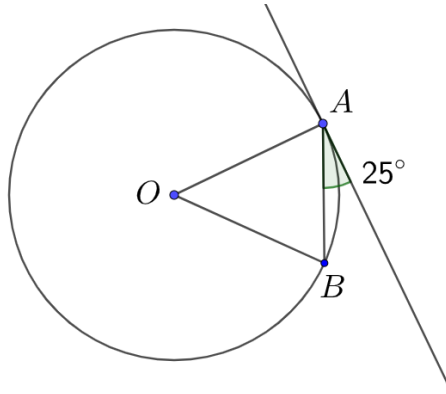
d. Kuinka monta numeroa 9 on luvussa $9\,999\,999\,999^2$?

/2

5. Tasoon on piirretty kolme toisiaan sivuavaa ympyrää. Tiedetään, että yhden näistä keskipiste on A ja säde on 1, että toisen keskipiste on B ja säde 2 sekä että kolmannen keskipiste on C ja säde 3. Laske keskipisteiden muodostaman kolmion ABC pinta-ala.

/2

6. Eräälle tason ympyrälle piirretty jänne AB erottaa ympyrästä kaaren, jonka pituus on 5. Lisäksi tiedetään, että janteen päätepisteeseen A piirretyn tangentin sekä janteen AB välinen kulma on 25 astetta. Ratkaise koko ympyrän kehän pituus.



/2

7. Eräästä kolminumeroisesta positiivisesta kokonaisluvusta tiedetään, että:

- sen ensimmäinen numero on 5
- se on jaollinen luvulla 9
- sen ensimmäisen ja viimeisen numero paikka vaihtamalla saadaan alkuperäistä suurempi luku

Mitkä luvut kelpaavat alkuperäiseksi luvuksi? Perustele.

/2

Peruskoulun matematiikkakilpailu

Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019

Osa B

Työskentelyaika 45 minuuttia. Ratkaise kaikki tehtävät erilliselle paperille. Kirjoita nimesi sekä tähän paperiin että erilliseen paperiin. Palauta molemmat paperit.

Perustele laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Laskinta saa käyttää. Lisäksi sallitut välineet: lyijykynä, viivoitin, pyyhkekumi.

Nimi:

Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	8	Yht.
Max.	2	2	2	2	2	2	2	4	18
Pisteet									

A-tyyppin paperiarkkijärjestelmä voidaan määritellä seuraavasti:

Paperiarkki, jonka koko on A0, on pinta-alaltaan yhden neliömetrin kokoinen.

Kaikki A-paperiarkit ovat keskenään yhdenmuotoisia suorakulmioita.

A1-paperiarkki saadaan A0-arkista puolittamalla, A2 taas A1:stä puolittamalla ja niin edelleen.

- Oletetaan A-tyyppin paperin lyhyemmän sivun pituudeksi 1. Kuinka pitkä on pidempi sivu?
- Laske A0-paperiarkin sivujen mitat.
- Laske A1-paperiarkin pinta-ala.
- Laske A1-arkin sivujen mitat.
- Selvitä A1-arkin ja A0-arkin lyhyempien sivujen pituuksien suhde.
- Selvitä A1-arkin pidemmän sivun ja A0-arkin lyhyemmän sivun suhde.
- A1-arkkia taitetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti niin, että taitoksen jälkeen arkki on neliön muotoinen. Selvitä neliön pinta-alan suhde alkuperäisen arkin pinta-alaan.
- Oletetaan erään A0-arkin paksuudeksi millimetrin kymmenesosa. Tämä taitetaan, taitokset leikataan auki ja palaset asetellaan päällekkäin. Sama toistetaan jälleen saaduille palasille. Kuinka paksu paperipino on, kun palaset ovat
 - neljän taittamiskerran jälkeen
 - kuuden taittamiskerran jälkeen
 - kymmenen taittamiskerran jälkeen
 - n taittamiskerran jälkeen, $n = 1, 2, 3, \dots$?

Peruskoulun matematiikkakilpailu

Loppukilpailu perjantaina 18.1.2019

Osa C

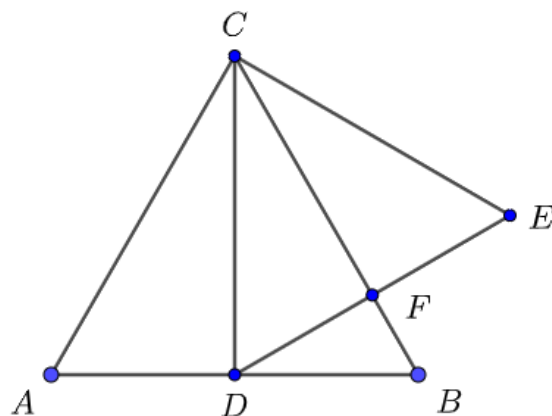
Työskentelyaika 60 minuuttia. Ratkaise tehtävä 5 tehtäväpaperiin ja muut erilliselle paperille. Kirjoita sekä tähän paperiin että erilliseen paperiin nimesi. Palauta molemmat paperit.

Perustele laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Laskinta saa käyttää. Lisäksi sallitut välineet: lyijykynä, viivoitin, pyyhkekumi.

Nimi:

Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	8	Yht.
Max.	6	6	6	6	6	6	6	6	48
Pisteet									

- Kolmiot ABC ja CDE ovat tasasivuisia. Piste D on janan AB keskipiste, ja piste F on janojen BC ja DE leikkauspiste. Lisäksi tiedetään, että $AB = 1$.
 - Laske janan BF pituus.
 - Laske kolmion BDE pinta-alan tarkka arvo.

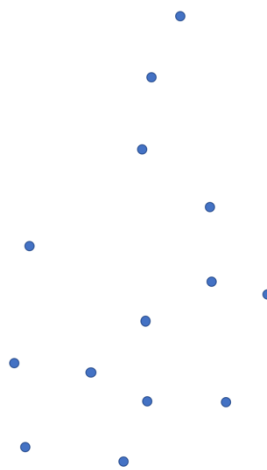
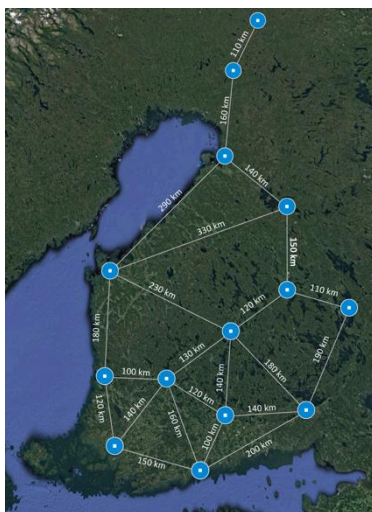


- Erään tablettimallin latausasema on suunniteltu akun iän pidentämiseksi niin, että se lataa 60 ensimmäistä prosenttiyksikköä (lataustaso 0 ... 60 %) täydellä teholla ja 40 viimeistä prosenttiyksikköä (lataustaso 60 ... 100 %) vajaalla 80-prosenttisella teholla. Latausasema lataa tyhjän akun täydeksi 9 tunnissa. Voidaan olettaa, että latauksen aikana ei kulu akkua.
 - Kuinka kauan kestää latauksessa 20 prosentista 40 prosenttiin?
 - Kuinka kauan kestää latauksessa 36 prosentista 83 prosenttiin?

3. a. Olkoot X ja Y kaksi erisuurta numeroa. Tiedetään, että kolminumeroinen luku XYX ei ole jaollinen luvulla 6 ja että $X + Y + X = 15$. Määritä mahdolliset luvut XYX .
- b. Olkoot X ja Y kaksi erisuurta numeroa. Tiedetään, että nelinumeroinen luku $XYXX$ ei ole jaollinen luvulla 4 ja että $X + Y + Y + X = 18$. Määritä mahdolliset luvut $XYXX$.
4. Zenon paradoksina tunnetussa antiikin Kreikan aikaisessa tarinassa sankari Akilles juoksee kilpaa kilpikonnan kanssa. Kilpikonnalla on kisan alussa 100 Akilleen askelta etumatkaa, ja Akilles voittaa kisan, jos hän saa kilpikonnan kiinni. Sekä Akilles että kilpikonna juoksevat samaan suuntaan, ja Akilleen ottaessa kuusi askelta kilpikonna etenee yhden askeleenmitan.

Vastaa perustellen, kuinka monta askelta kilpikonna on ottanut, kun Akilles on

- ottanut 20 ensimmäistä askeltaan.
 - puolivälissä kilpailua.
 - 10 askeleen päässä kilpikonnasta.
5. Työskentelet tietoliikennerytyksessä. Tehtävänäsi on yhdistää oheisen kartan kaupungit niin, että jokaisesta kaupungista on katkeamaton yhteys mihin tahansa toiseen kaupunkiin ja että verkon kokonaispituus on mahdollisimman lyhyt. Laadi viereiseen kaavioon kyseiset ehdot täyttävä tietoliikenneverkko ja laske sen kokonaispituus.



Verkon pituus: _____ km

6. Luonnolliset luvut m ja n toteuttavat yhtäsuuruuden

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} = \frac{3}{5}.$$

Mitä lukuja m ja n voivat olla? Perustele.

Mathematics competition, comprehensive school

Final round, Friday 18th, January 2019

Part A

The time allotted is 30 minutes. Only this paper will be graded.

Show your work with diagrams, calculations or explanations. The use of any calculator is prohibited. You may use: pencil or pen, ruler, eraser.

Name:

Task	1	2	3	4	5	6	7	sum
Max.	2	2	2	2	2	2	2	14
Points								

1. Calculate the price of the pencil based on the information below.

$$\text{pencil} + \text{book} = 1,10 \text{ €}$$

$$\text{book} = \text{pencil} + 1,00 \text{ €}$$

$$\text{pencil} = ?$$

/2

2. Prove that $10^{2019} - 10^{2017}$ is divisible by three consecutive integers greater than unity.

/2

3. Find the next element in the sequence.

1, 3, 5, 2, 6, 8, 5, 15, 17, 14, ?

/2

4. To find the square of a binomial, the following formula may be used:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Apply the formula to find:

e. 99^2

f. 999^2

g. $999\,999^2$

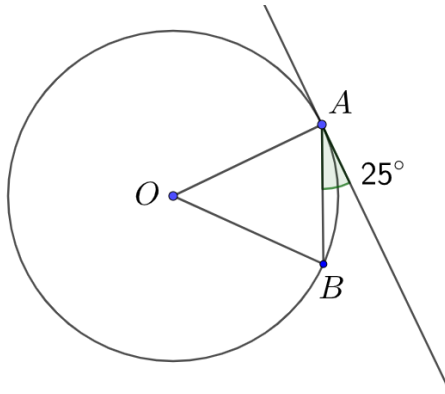
- h. How many digits in $9\,999\,999\,999^2$ are nines?

/2

5. Consider three tangential circles on a plane. The radius of one of these circles is 1 and its centre is A , of the second, 2 and B , and of the third, 3 and C . Find the area of the triangle ABC formed by the centres of these three circles.

/2

6. Let AB be a 5-unit long arc on a circle of centre O . If the angle between the chord AB and the tangent to O at A is 25 degrees, find the circumference of the circle O .



/2

7. It is known that a positive three-digit whole number satisfies the following conditions:
- Its first digit is 5.
 - It is divisible by 9.
 - Interchanging the first and the last digit yields a greater number than the original.

Find the possible original numbers. Show your work.

/2



Mathematics competition, comprehensive school

Final round, Friday 18th, January 2019

Part B

The time allotted is 45 minutes. Write all your work on a separate sheet. Write your name on both this sheet and the separate ones. Give all papers back.

Show your work with diagrams, calculations or explanations. You may use a calculator. You may also use: pencil or pen, ruler, eraser.

Name:

Task	1	2	3	4	5	6	7	8	sum
Max.	2	2	2	2	2	2	2	4	18
Points									

The A series of paper sheets can be defined as follows:

The area of a sheet of size A0 is one square meter.

All A series sheets are similar rectangles.

Halving a sheet of size A0 yields two sheets of size A1, A1 yields two A2's, A2 yields two A3's, and so forth.

1. Assume that the shorter side of an A series sheet is of length 1. Find the length of its longer side.
2. Find the width and height of a sheet of size A0.
3. Find the area of a sheet of size A1.
4. Find the width and height of a sheet of size A1.
5. Find the ratio of the shorter size of an A1 sheet to the shorter side of an A0 sheet.
6. Find the ratio of the longer size of an A1 sheet to the shorter side of an A0 sheet.
7. A sheet of size A1 is folded into a square so that the fold is parallel to its shorter side. Find the ratio of the area of the resulting square to the area of the original sheet.
8. Let us assume that a specific sheet of size A0 is a tenth of a millimeter in thickness. It is folded, the folds are cut open, the pieces are stacked, and the process is repeated unto the pieces obtained. Find the thickness of the pile after being folded
 - a. two times
 - b. six times
 - c. ten times
 - d. n times, $n = 1, 2, 3, \dots$

Part C

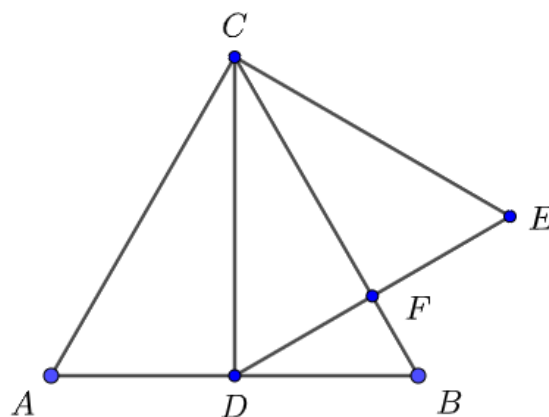
The time allotted is 60 minutes. Solve the task #5 on this sheet and all others on a separate one. Write your name on both papers. Give all papers back.

Show your work with diagrams, calculations or explanations. You may use a calculator. You may also use: pencil or pen, ruler, eraser.

Name:

Task	1	2	3	4	5	6	7	8	sum
Max.	6	6	6	6	6	6	6	6	48
Points									

1. Triangles ABC and CDE are equilateral. Point D is the midpoint of segment AB , and segments BC and DE intersect at F . Furthermore, it is known that $AB = 1$.
 - a. Find the length of BF .
 - b. Find the exact value for the area of BDE .



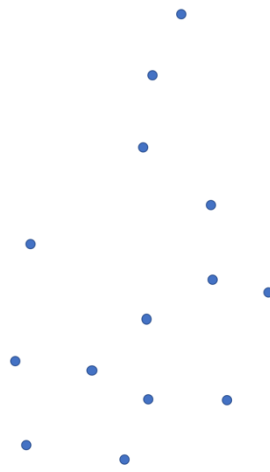
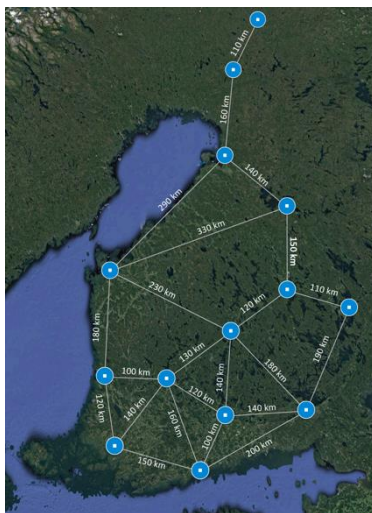
2. A charging station for a certain model of tablet devices is designed to prolong battery life by charging the first 60 percentage points (charge levels 0 .. 60 %) at full power and the last 40 percentage points (charge levels 60 ... 100 %) at 80-percent power. The station charges one device from empty to full battery in 9 hours. It can be assumed that there is no battery consumption during the charging process.
 - a. How long does it take to charge a device from 20 % to 40 %?
 - b. How long does it take to charge a device from 36 % to 83 %?

3. a. Let X and Y be two different one-digit numbers. It is known that the three-digit number XYX is not divisible by 6 and that $X + Y + X = 15$. Find all possible XYX .
 b. Let X and Y be two different one-digit numbers. It is known that the four-digit number $XYXX$ is not divisible by 4 and that $X + Y + Y + X = 18$. Find all possible $XYXX$.

4. Dating back to ancient Greece, the story known as Zeno's paradox recounts the race between the Greek hero Achilles and a turtle. Let us assume that at the start of the race, the turtle has the lead by 100 Achilles steps. Achilles will win the race if he catches the turtle. Both the turtle and Achilles run in the same direction, and for each step the turtle takes, Achilles takes six.

Find the amount of steps taken by the turtle when Achilles

- a. has taken his first 20 steps.
 - b. is halfway through the race.
 - c. is 10 steps away from the turtle.
-
5. You work in a telecommunications company. Your job is to connect the cities on the map below so that there is a connection from every city to every other city and that the sum of the lengths of the connections is as small as possible. Draw a diagram of the connections with these properties and find the sum of the lengths in the network.



Network length: _____ km

6. Natural numbers m and n satisfy

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} = \frac{3}{5}.$$

What numbers can m and n be? Show your work.