Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

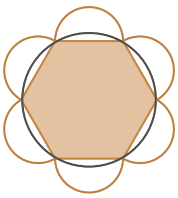
9. 10. 2019

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Pihlan työviikko lyheni p % samalla, kun hänen tuntipalkkansa nousi p %. Tällöin Pihlan viikkopalkka aleni 4 %. Voidaan päätellä, että

a) $p < 15$	b) $p \geq 15$	c) $p = 20$	d) $p = 10$

2. Ympyrän Γ sisällä on säännöllinen 6-kulmio ja 6-kulmion sivuille on piirretty puoliympyrän kaaret kuvan mukaisesti.



Näiden puoliympyröiden pinta-alojen summan suhde ympyrän Γ pinta-alaan on

a) $2/3$	b) vähemmän kuin 0,8
c) $3/4$	d) $4/5$

3. Etsittävänä on murtoluku q, joka on yhtä etäällä jaksollisista desimaaliluvuista $0{,}0246246\ldots$ ja $0{,}0328328\ldots$ (molemmissa tapauksissa jaksot ovat kolmenumeroisia).

a) $q = \dfrac{612}{15000}$	b) $q = \dfrac{120}{7290}$
c) $q = \dfrac{574}{19980}$	d) Tällaista ei ole olemassa.

4. Tasakylkisen puolisuunnikkaan sivujen pituudet ovat $a + 3$, $a - 3$, $a + 3$ ja $a + 7$. Puolisuunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Mitä voidaan sanoa pituudesta a?

a) $a < 8$	b) $a = 10$	c) $a = 7$	d) a on kokonainen

5. Monikulmion *lävistäjällä* tarkoitetaan kahden kärjen välistä yhdysjanaa, joka ei ole sivu. Monikulmion kulmien ei sallita olevan oikokulmia. *Kuperalla monikulmiolla* tarkoitetaan monikulmiota, joka sisältää lävistäjänsä. Mitkä monikulmioita koskevat väittämät ovat tosia?

a) On olemassa viisikulmio, jolla on kaksi yhdensuuntaista lävistäjää.
b) Säännöllisen monikulmion lävistäjät leikkaavat aina toisiaan.
c) Jos kuperan n-kulmion kaksi lävistäjää on yhdensuuntaiset, niin $n \geq 6$.
d) Monikulmiolla voi olla kaksi lävistäjää, jotka ovat saman suoran erillisiä osia.

6. Mitä voidaan sanoa kokonaisluvusta 7^{7^7}, kun se kirjoitetaan tavanomaisella tavalla kymmenjärjestelmässä?

a) Siinä on vähemmän kuin miljoona numeroa.
b) Se päättyy numeroon 3.
c) Sen numeroiden summa ei ole kolmella jaollinen.
d) Se ei ole alkuluku.

7. Aritmeettiselle jonolle a_1, a_2, ... pätee $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ ja $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$, missä $d = a_2 - a_1$. Määritä a_1 ja d, kun oletetaan, että a_1 ja d ovat samanmerkkisiä.

8. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0, 0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k - 1$ ruutua vaakatasossa, k ruutua pystysuuntaan tai $k + 1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x, y) johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun $(x - (k - 1), y)$ tai ruutuun $(x + (k - 1), y)$,
- ruutuun $(x, y - k)$ tai ruutuun $(x, y + k)$,
- tahi ruutuun $(x-(k+1), y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1), y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k+1), y-(k+1))$ tai ruutuun $(x+(k+1), y+(k+1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a, b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0, 0)$ ruutuun (a, b). Voittaako Maija aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla, kun a) $k = 6$, b) $k = 2019$?

9. 10.

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

2019

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. ***Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.*** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi: ______________________

Koulu: ______________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

9. 10. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja 2019

Tehtäviä on kahdella sivulla; kolme ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Ympyräpohjaisen suoran kartion pohjan halkaisija on 2 ja myös etäisyys kärjestä pohjan reunaan on 2. Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjan sivu on 2 ja huipun etäisyys pohjaneliön kärjestä 2. Mitä voit sanoa tilavuuksista?

a) Tilavuudet ovat kokonaislukuja.
b) Tilavuuksia ei voi laskea annetuilla tiedoilla.
c) Kappaleiden tilavuudet ovat samat.
d) Ympyräpohjainen kartio on suurempi.

2. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät kokonaiskertoimiselle polynomille $P(x) = x^4 + x^2 + 1$?

a) Se on jaoton, ts. sitä ei voi esittää alempiasteisten kokonaiskertoimisten polynomien tulona.
b) Sillä ei ole reaalisia nollakohtia.
c) Sen kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen.
d) Yhtälöllä $P(x) = 7$ on rationaalinen ratkaisu.

3. Funktiolle $f\colon\ ]0,\infty[\ \longrightarrow\ ]1,\infty[$ pätee

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

kaikilla $x \in\ ]0,\infty[$. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Jos $x, y \in\ ]0,\infty[$ ja $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$.
b) Jos $x \in\ ]0,\infty[$, niin $f(x) < x$.
c) On olemassa $x \in\ ]0,\infty[$, jolle $f(x) = x + 1$.
d) Jos $x \in\ ]0,\infty[$, niin $f(x) > x$.

4. Aritmeettiselle jonolle $a_1,\ a_2,\ \ldots$ pätee $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ ja $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$, missä $d = a_2 - a_1$. Määritä a_1 ja d, kun oletetaan, että a_1 ja d ovat samanmerkkisiä.

5. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0,0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k-1$ ruutua vaakatasoon, k ruutua pystysuuntaan tai $k+1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x,y) johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun $(x-(k-1),y)$ tai ruutuun $(x+(k-1),y)$,
- ruutuun $(x,y-k)$ tai ruutuun $(x,y+k)$,
- tahi ruutuun $(x-(k+1),y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1),y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k+1),y-(k+1))$ tai ruutuun $(x+(k+1),y+(k+1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a,b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0,0)$ ruutuun (a,b). Millä kokonaisluvun k arvoilla Maija voittaa aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla?

6. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^4y^2+2x=2019$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x,y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

9. 10.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

2019

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. ***Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.*** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi: ______________________________

Koulu: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

9. 10. 2019

1. Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio, jolle tähden $ACEBD$ ala on yksi. Määritä pinta-ala nelikulmiolle $APQD$, kun P on janojen AC ja BE leikkaupiste sekä Q puolestaan janojen BD ja CE leikkauspiste.

2. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0, 0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k - 1$ ruutua vaakatasoon, k ruutua pystysuuntaan tai $k + 1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x, y) johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun $(x - (k - 1), y)$ tai ruutuun $(x + (k - 1), y)$,
- ruutuun $(x, y - k)$ tai ruutuun $(x, y + k)$,
- tahi ruutuun $(x-(k+1), y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1), y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k + 1), y - (k + 1))$ tai ruutuun $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a, b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0, 0)$ ruutuun (a, b). Millä kokonaisluvun k arvoilla Maija voittaa aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla?

3. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

4. Tarkastellaan Fibonaccin lukujen jonoa F_1, F_2, $\ldots$, joka määritellään asettamalla $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, jolla on se ominaisuus, että välillä $]F_n, F_{n+1}[$ on kuutioluku jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant k$, tai osoita, että tällaista lukua k ei ole olemassa. Positiivisia kuutiolukuja ovat $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ ja niin edelleen.

Työaikaa on **120 minuuttia**.
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse kuhunkin koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

9. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

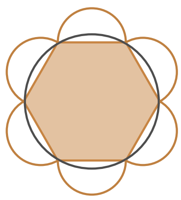
2019

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. Pias arbetsvecka förkortades med p % samtidigt som hennes timlön steg med p %. Då sjönk Pias veckolön med 4 %. Vi kan då dra slutsatsen att

a) $p < 15$ b) $p \geq 15$ c) $p = 20$ d) $p = 10$

2. Innanför cirkeln Γ har man ritat en regelbunden 6-hörning och på sidorna av 6-hörningen har man ritat cirkelhalvbågar enligt bilden.



Förhållandet mellan summan av dessa halvcirklars areor och arean av cirkeln Γ är

a) $2/3$ b) mindre än 0,8 c) $3/4$ d) $4/5$

3. Bestäm ett bråktal q som ligger lika långt från de periodiska decimaltalen $0{,}0246246\ldots$ och $0{,}0328328\ldots$ (i båda talen är perioderna tresiffriga).

a) $q = \dfrac{612}{15000}$ b) $q = \dfrac{120}{7290}$

c) $q = \dfrac{574}{19980}$ d) Ett sådant tal existerar inte.

4. Sidlängderna i ett likbent parallelltrapets är $a+3$, $a-3$, $a+3$ ja $a+7$. Parallelltrapetsets diagonaler står vinkelrätt mot varandra. Vad kan vi säga om längden a?

a) $a < 8$ b) $a = 10$ c) $a = 7$ d) a är ett heltal

5. Med en *diagonal* i en månghörning avser vi en sträcka som förenar två hörn så att denna sträcka inte är en sida i månghörningen. Månghörningens vinklar tillåts inte vara raka. Med en *konvex månghörning* avser vi en månghörning vars alla diagonaler är innanför månghörningen. Vilka av påståendena som berör månghörningar är sanna?

a) Det existerar en femhörning som har två parallella diagonaler.
b) Diagonalerna i en regelbunden månghörning skär alltid varandra.
c) Om två diagonaler i en konvex n-hörning är parallella så är $n \geq 6$.
d) En månghörning kan ha två diagonaler som utgör två skilda delar av samma linje.

6. Vad kan vi säga om talet 7^{7^7} då det skrivs på det vanliga sättet i tiosystemet?

a) Det har färre än en miljon siffror.
b) Det slutar med siffran 3.
c) Dess siffersumma är inte delbar med tre.
d) Det är inte ett primtal.

7. För en aritmetisk talföljd a_1, a_2, ... gäller att $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ och $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ där $d = a_2 - a_1$. Bestäm a_1 ja d när vi antar att a_1 och d har samma tecken.

8. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0, 0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k - 1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k + 1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x, y) till någon av följande rutor:

– till rutan $(x - (k - 1), y)$ eller rutan $(x + (k - 1), y)$,
– till rutan $(x, y - k)$ eller rutan $(x, y + k)$,
– eller till rutan $(x - (k + 1), y - (k + 1))$, rutan $(x - (k + 1), y + (k + 1))$, rutan $(x + (k + 1), y - (k + 1))$ eller rutan $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a, b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0, 0)$ till rutan (a, b). Vinner Maja alltid oberoende av heltalen a och b ifall hon spelar på rätt sätt när a) $k = 6$, b) $k = 2019$?

9. 10. Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien 2019

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. ***Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.*** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn: ______________________________

Skola: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

9. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

2019

Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. Bottendiametern i en rak cirkulär kon är 2 och avståndet från spetsen till bottenytans sida är 2. Sidan i en rak pyramids kvadratiska bottenyta är 2 och avståndet från spetsen till basytans hörn är 2. Vad kan vi säga om volymerna?

a) Volymerna är heltal.
b) Vi kan inte beräkna volymerna med den givna informationen.
c) Kropparna har samma volym.
d) Den cirkulära konen är större.

2. Vilka av följande påståenden är sanna för polynomet med heltalskoefficienter $P(x) = x^4 + x^2 + 1$?

a) Det är odelbart dvs. vi kan inte uttrycka det som en produkt av polynom med heltalskoefficienter och lägre grad.
b) Det saknar reella nollställen.
c) Dess graf är symmetrisk med avseende på y-axeln.
d) Ekvationen $P(x) = 7$ har en rationell lösning.

3. För funktionen $f\colon\ ]0,\infty[\ \longrightarrow\ ]1,\infty[$ gäller att

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

för alla $x \in\ ]0,\infty[$. Vilka av följande påståenden är säkert sanna?

a) När $x, y \in\ ]0,\infty[$ och $x \neq y$ så är $f(x) \neq f(y)$.
b) När $x \in\ ]0,\infty[$ är $f(x) < x$.
c) Det existerar ett $x \in\ ]0,\infty[$, för vilket $f(x) = x + 1$.
d) När $x \in\ ]0,\infty[$ är $f(x) > x$.

4. För en aritmetisk talföljd a_1, a_2, … gäller att $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ och $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ där $d = a_2 - a_1$. Bestäm a_1 och d när vi antar att a_1 och d har samma tecken.

5. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0, 0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k - 1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k + 1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x, y) till någon av följande rutor:

- till rutan $(x - (k - 1), y)$ eller rutan $(x + (k - 1), y)$,
- till rutan $(x, y - k)$ eller rutan $(x, y + k)$,
- eller till rutan $(x - (k + 1), y - (k + 1))$, rutan $(x - (k + 1), y + (k + 1))$, rutan $(x + (k + 1), y - (k + 1))$ eller rutan $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a, b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0, 0)$ till rutan (a, b). Med vilka heltalsvärden på k vinner Maja alltid oberoende av heltalsvärdena a och b om hon spelar på rätt sätt?

6. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

dvs. ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den ovan nämnda ekvationen.

9. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2019

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervals-uppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. ***Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.*** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn: ______________________________

Skola: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

9. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

2019

1. Låt $ABCDE$ vara en regelbunden femhörning för vilken arean av stjärnan $ACEBD$ är ett. Bestäm arean av fyrhörningen $APQD$ när P är skärningspunkten mellan sträckorna AC och BE och Q är skärningspunkten mellan sträckorna BD och CE.

2. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0, 0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k - 1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k + 1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x, y) till någon av följande rutor:

- till rutan $(x - (k - 1), y)$ eller rutan $(x + (k - 1), y)$,
- till rutan $(x, y - k)$ eller rutan $(x, y + k)$,
- eller till rutan $(x - (k + 1), y - (k + 1))$, rutan $(x - (k + 1), y + (k + 1))$, rutan $(x + (k + 1), y - (k + 1))$ eller rutan $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a, b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0, 0)$ till rutan (a, b). Med vilka heltalsvärden på k vinner Maja alltid oberoende av heltalsvärdena a och b om hon spelar på rätt sätt?

3. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

dvs. ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den ovan nämnda ekvationen.

4. Vi undersöker Fibonaccis talföljd $F_1, F_2, \ldots$ som definieras genom att sätta $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för varje positivt heltal n. Bestäm det minsta positiva heltal k som har den egenskapen att det i intervallet $]F_n, F_{n+1}[$ finns ett kubtal för varje heltal $n \geqslant k$ eller visa att det inte existerar att sådant tal k. Positiva kubtal är $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ och så vidare.

Tävlingstiden är **120 minuter**.
Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och skola tydligt på varje provpapperet.

9. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Basic Level

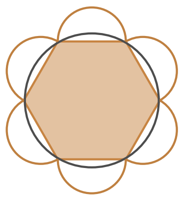
2019

The problems are on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. Pihla's work week shortened p % and her hourly wage simultaneously increased p %. All in all, Pihla's weekly wage decreased 4 %. From this it follows that

a) $p < 15$ b) $p \geq 15$ c) $p = 20$ d) $p = 10$

2. A regular hexagon has been inscribed to a circle Γ, and on each side of the hexagon a semicircle has been drawn as in the figure.



The sum of the areas of the semicircles divided by the area of the circle Γ is

a) 2/3 b) less than 0.8 c) 3/4 d) 4/5

3. Determine a fraction q which has the same distance to each of the periodic decimal numbers $0.0246246\ldots$ and $0.0328328\ldots$. In each case the period has three digits.

a) $q = \dfrac{612}{15000}$ b) $q = \dfrac{120}{7290}$

c) $q = \dfrac{574}{19980}$ d) Such a fraction does not exist.

4. The sides of an isosceles trapezoid have lengths $a+3$, $a-3$, $a+3$ and $a+7$. Furthermore, the diagonals of the trapezoid are perpendicular to each other. What can we say about the length a?

a) $a < 8$ b) $a = 10$ c) $a = 7$ d) a is an integer

5. We call a segment connecting two vertices of a polygon a *diagonal*, if it is not a side of the polygon. The angles of a polygon are not allowed to be straight angles. We call a polygon *convex*, if it contains all its diagonals. Which of the following statements concerning polygons are true?

a) There exists a pentagon with two parallel diagonals.
b) The diagonals of a regular polygon always intersect each other.
c) If two diagonals of a convex n-gon are parallel, then $n \geq 6$.
d) A polygon can have two diagonals which are disjoint parts of some line.

6. What can we say about the integer 7^{7^7}, when it is written out in the usual way in the decimal system?

a) It has fewer than a million digits.
b) It ends with the digit 3.
c) The sum of its digits is not divisible by three.
d) It is not a prime.

7. An arithmetic sequence a_1, a_2, a_3, $\ldots$ has the properties $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ and $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$, where $d = a_2 - a_1$. Furthermore, a_1 and d have the same sign. Determine a_1 and d.

8. Maija plays the following solitaire on an infinite grid of squares: Let k be a positive integer. Maija has a stone which lies on the square $(0,0)$ at the beginning. In one move, the stone can be moved $k-1$ squares horizontally, k squares vertically, or $k+1$ squares diagonally. More precisely, the stone can be moved from a square (x, y) to any of the squares

- $(x - (k-1), y)$ and $(x + (k-1), y)$,
- $(x, y - k)$ and $(x, y + k)$,
- as well as $(x-(k+1), y-(k+1))$, $(x-(k+1), y+(k+1))$, $(x+(k+1), y-(k+1))$ and $(x + (k+1), y + (k+1))$.

Maija chooses randomly a goal square (a, b), where a and b are integers. She wins, if she can find a series of moves that take the stone from the square $(0,0)$ to the square (a, b). Does Maija win regardless of the integers a and b, provided that she chooses her moves with care, when a) $k = 6$, b) $k = 2019$?

9. 10.

Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

2019

The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **The use of calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name: ____________________________________

School: ____________________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

9. 10. High School Mathematics Competition 2019

First Round, Intermediate Level

The problems are on two pages; the first three problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. The diameter of the base of a right circular cone is 2 and the distance of its vertex to the edge of the base is 2. Another right cone has a base which is a square with side length 2 and the distance of its vertex to a vertex of the base is 2. What can you say about the volumes of the cones?

a) The volumes are integers.
b) The volumes cannot be computed with the given data.
c) The volumes are equal.
d) The circular cone has larger volume.

2. Which of the following claims hold for the polynomial $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ with integer coefficients?

a) It is irreducible, i.e. it cannot be written as a product of polynomials with integer coefficients of lower degree.
b) It has no real roots.
c) Its graph is symmetrical with respect to the y-axis.
d) The equation $P(x) = 7$ has a rational solution.

3. A function $f\colon\,]0,\infty[\longrightarrow]1,\infty[$ has the property that

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

for all $x \in]0,\infty[$. Which of the following statements are certainly true?

a) If $x, y \in]0,\infty[$ and $x \neq y$, then $f(x) \neq f(y)$.
b) If $x \in]0,\infty[$, then $f(x) < x$.
c) There exists $x \in]0,\infty[$, for which $f(x) = x + 1$.
d) If $x \in]0,\infty[$, then $f(x) > x$.

4. An arithmetic sequence $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ has the properties $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1+d}{d}$ and $a_{2019} = 2020+2018\sqrt{5}$, where $d = a_2 - a_1$. Furthermore, a_1 and d have the same sign. Determine a_1 and d.

5. Maija plays the following solitaire on an infinite grid of squares: Let k be a positive integer. Maija has a stone which lies on the square $(0, 0)$ at the beginning. In one move, the stone can be moved $k-1$ squares horizontally, k squares vertically, or $k+1$ squares diagonally. More precisely, the stone can be moved from a square (x, y) to any of the squares

- $(x-(k-1), y)$ and $(x+(k-1), y)$,
- $(x, y-k)$ and $(x, y+k)$,
- as well as $(x-(k+1), y-(k+1))$, $(x-(k+1), y+(k+1))$, $(x+(k+1), y-(k+1))$ and $(x+(k+1), y+(k+1))$.

Maija chooses randomly a goal square (a, b), where a and b are integers. She wins, if she can find a series of moves that take the stone from the square $(0, 0)$ to the square (a, b). For which values of k does Maija win regardless of the integers a and b, provided that she chooses her moves with care?

6. Solve the Diophantine equation

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

that is, find all pairs of integers (x, y) solving the above equation.

9. 10.

Intermediate Level Multiple Choice Answer Sheet

2019

The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square, if the answer is right and a "−" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name: ______________________________

School: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

9. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Open Level

2019

1. Let $ABCDE$ be a regular pentagon, and suppose that the area of the star $ACEBD$ is one. Let the segments AC and BE intersect at P, and let the segments BD and CE intersect at Q. Determine the area of the quadrilateral $APQD$.

2. Maija plays the following solitaire on an infinite grid of squares: Let k be a positive integer. Maija has a stone which lies on the square $(0,0)$ at the beginning. In one move, the stone can be moved $k-1$ squares horizontally, k squares vertically, or $k+1$ squares diagonally. More precisely, the stone can be moved from a square (x,y) to any of the squares

- $(x-(k-1),y)$ and $(x+(k-1),y)$,
- $(x,y-k)$ and $(x,y+k)$,
- as well as $(x-(k+1),y-(k+1))$, $(x-(k+1),y+(k+1))$, $(x+(k+1),y-(k+1))$ and $(x+(k+1),y+(k+1))$.

Maija chooses randomly a goal square (a,b), where a and b are integers. She wins, if she can find a series of moves that take the stone from the square $(0,0)$ to the square (a,b). For which values of k does Maija win regardless of the integers a and b, provided that she chooses her moves with care?

3. Solve the Diophantine equation

$$x^4y^2 + 2x = 2019,$$

that is, find all pairs of integers (x,y) solving the above equation.

4. Let us consider the sequence F_1, F_2, $\ldots$ of Fibonacci numbers which is defined by setting $F_1 = F_2 = 1$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for each positive integer n. Find the smallest positive integer k for which the interval $]F_n, F_{n+1}[$ contains a cube number for every integer $n \geqslant k$, or prove that such a number k does not exist. Positive cube numbers are $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ and so on.

Time allowed: **120 minutes**.
Only writing and drawing equipments are allowed.
No calculators or tables!
Write your solutions of different problems on different sheets.
Mark every sheet with your name and school.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

9. 10. 2019

Perussarjan monivalintatehtävät

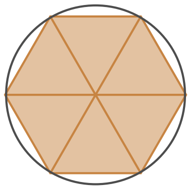
	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$-$	$+$	$+$	$-$
3.	$-$	$-$	$+$	$-$
4.	$-$	$+$	$-$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$+$
6.	$+$	$+$	$+$	$+$

P1. Pihlan työviikon pituus oli aluksi t ja tuntipalkka s, joten viikkopalkka oli ts. Muutosten jälkeen työviikon pituudeksi tuli $t\left(1-\frac{p}{100}\right)$ ja tuntipalkaksi $s\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Pihlan viikkopalkalle saadaan siis yhtälö

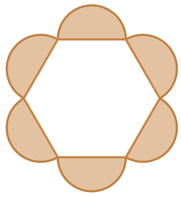
$$
\begin{aligned}
& t\left(1-\frac{p}{100}\right) s\left(1+\frac{p}{100}\right)=ts\left(1-\frac{4}{100}\right) \\
\iff & \left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=0,96 \\
\iff & 1-\frac{p^2}{100^2}=0,96 \iff 10000-p^2=9600 \iff p^2=400 \iff p=20,
\end{aligned}
$$

sillä $p>0$. Siis väitteet b ja c ovat oikein, a ja d sen sijaan väärin.

P2. Säännöllinen kuusikulmio jakautuu tunnetusti kuvion mukaisesti kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi,



joten puoliympyröiden yhteinen halkaisijan pituus on ympyrän Γ säde r ja puoliympyröiden yhteinen säde on $r/2$.



Puoliympyröiden alojen summa on $6 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi r^2$ ja kysytty suhde on siis $3/4 < 0{,}8$. Siis kohdat b ja c ovat oikein, a ja d väärin.

P3. Merkitään $a = 0{,}0246246\ldots$ ja $b = 0{,}0328328\ldots$, jolloin

$$\begin{cases} 10a = 0{,}246246\ldots \\ 10\,000a = 246{,}246246\ldots \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 10b = 0{,}328328\ldots \\ 10\,000b = 328{,}328328\ldots, \end{cases}$$

mistä laskemalla erotuksia saadaan

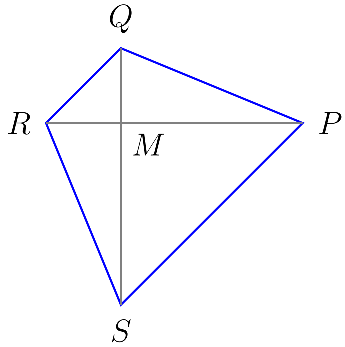
$$9\,990a = 246 \text{ ja } 9\,990b = 328.$$

Siis $a = 246/9990$ ja $b = 328/9990$. Etsittävä luku on näiden keskiarvo (joka voidaan selvästi kirjoittaa murtolukuna, joten kohta d on väärin)

$$q = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{246+328}{9\,990} = \frac{574}{19\,980}.$$

Tämä on kohdan c vastaus; tarkastetaan vielä, että kohdissa a ja b on eri lukuja. Koska $612 > 574$ ja $15\,000 < 19\,980$, niin $612/15\,000 > 574/19\,980$. Koska $574 > 3 \cdot 120$ ja $19980 < 3 \cdot 7290$, niin $574/19\,980 > 120/7290$. Siis vain kohta c on oikein, muut ovat väärin.

P4. Tasakylkisen puolisuunnikkaan $PQRS$ sivujen pituudet ovat oletuksen mukaan $|PQ| = |RS| = a+3$, $|QR| = a-3$ ja $|SP| = a+7$.



Merkitään lävistäjien leikkauspistettä symbolilla M. Tarkastellaan lävistäjien osia $x = |MP|$, $y = |MQ|$, $u = |MR|$ ja $t = |MS|$. Koska lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, saadaan Pythagoraan lausetta toistuvasti käyttämällä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |MP|^2 + |MQ|^2 = |PQ|^2 = (a+3)^2 \\ y^2 + u^2 = |MQ|^2 + |MR|^2 = |QR|^2 = (a-3)^2 \\ u^2 + t^2 = |MR|^2 + |MS|^2 = |RS|^2 = (a+3)^2 \\ t^2 + x^2 = |MS|^2 + |MP|^2 = |SP|^2 = (a+7)^2. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä ja toisaalta kahdesta seuraavasta yhtälöstä saadaan edelleen

$$\begin{cases} x^2 - u^2 = (x^2 + y^2) - (y^2 + u^2) = (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ x^2 - u^2 = (t^2 + x^2) - (u^2 + t^2) = (a+7)^2 - (a+3)^2. \end{cases}$$

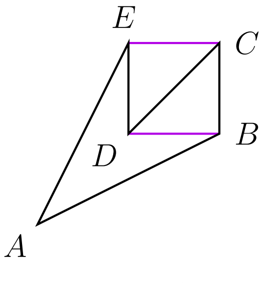
Näitä tietoja yhdistelemällä saadaan a:lle yhtälö

$$\begin{aligned} &(a+7)^2 - (a+3)^2 = x^2 - u^2 = (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ \Rightarrow\ &(a+7-(a+3))(a+7+(a+3)) = ((a+3)-(a-3))(a+3+(a-3)) \\ \iff\ &4 \cdot (2a+10) = 6 \cdot 2a \iff 8a + 40 = 12a \iff 40 = 4a \iff a = 10. \end{aligned}$$

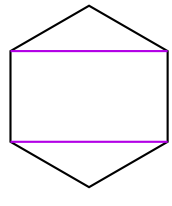
Ratkaisu $a = 10$ on kokonainen (kohdat b ja d oikein). Kohdat a ja c ovat sen sijaan väärin.

Huomautus: Tehtävän voi siis ratkaista olettamatta, että nelikulmio $PQRS$ on puolisuunnikas. Kaikkien ratkaisussa esitettyjen tuntemattomien ratkaisemiseen sen sijaan tarvittaisiin tätä oletusta, ja käyttämällä kolmioiden PMS ja QMR yhdenmuotoisuutta saataisiin $x = t = 17/\sqrt{2}$ ja $y = u = 7/\sqrt{2}$.

P5. a) Tällainen viisikulmio on todellakin olemassa. Lähdetään liikkeelle yhdensuuntaisista janoista, esimerkiksi BD ja CE, missä $B = (2,1)$, $C = (2,2)$, $D = (1,1)$ ja $E = (1,2)$. Asetetaan A sellaiseen paikkaan, että muodostuu viisikulmio $ABCDE$, vaikkapa origoon.

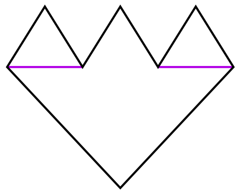


b) Säännöllisen monikulmion lävistäjät eivät välttämättä leikkaa toisiaan, kun sivuja on vähintään kuusi.



c) Kolmiolla ei ole lävistäjiä. Neli- ja viisikulmioiden tapauksessa lävistäjän jommallekummalle puolelle jää vain yksi kärki. Sen tähden kahdella lävistäjällä on pakko olla joko yhteinen kärki tai niiden on leikattava, joten ne eivät voi yhdensuuntaisia.

d) Monikulmion lävistäjät voivat olla saman suoran erillisiä osia, kuten seuraava kuva osoittaa.



Kohdat a, c ja d ovat siis tosia, b valetta.

P6. Merkitään $n = 7^{7^7}$. Tällöin

$$\lg(n) = 7^7 \lg 7 < 7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 < 50^3 \cdot 7 = 875\,000 < 10^6,$$

joten luvussa n on vähemmän kuin miljoona numeroa.

Huomataan, että $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, joten sen, mihin numero 7^k päättyy, kun $n \in \mathbb{N}$, ratkaisee eksponentin arvo modulo 4. Saadaan

$$7^7 \equiv (-1)^7 = -1 \equiv 3 \pmod{4},$$

joten

$$n \equiv 7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Siis luku n päättyy numeroon 3.

Kolmella jaollisuuden säännön mukaan n on kolmella jaollinen, jos ja vain jos sen numeroiden summa on kolmella jaollinen. Toisaalta selvästi n ei ole kolmella jaollinen, koska sen ainoa alkutekijä on 7. Tästä samasta syystä n ei tietenkään myöskään ole alkuluku. Siis kaikki vaihtoehdot ovat oikein.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Ratkaisemalla d yhtälöstä

$$\frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + d}{d} \iff d^2 = (a_1)^2 + a_1 d \iff d^2 - a_1 d - (a_1)^2 = 0$$

saadaan

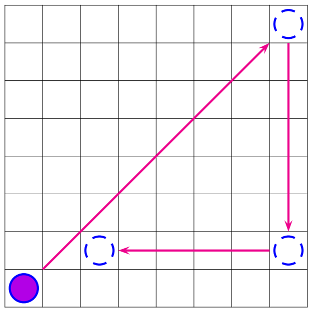
$$d = \frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_1)^2 + (a_1)^2} = \frac{1}{2}a_1 \pm \frac{|a_1|}{2}\sqrt{5}.$$

Koska $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5} > 0$ sekä a_1 ja d ovat samanmerkkisiä, niin ne ovat välttämättä positiivisia. Siis $d = a_1(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$. Sijoittamalla tämä tieto yhtälöön $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ saadaan

$$2020 + 2018\sqrt{5} = a_{2019} = a_1 + 2018d = a_1 + 2018a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{a_1}{2}(2020 + 2018\sqrt{5}),$$

joten $a_1 = 2$ ja $d = 1 + \sqrt{5}$.

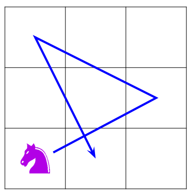
P8. Tämä on tehtävän **V5** erikoistapaus. Kohdassa a vastaus on siis kyllä, kohdassa b ei. Kohtaan a on myös yleistä ratkaisua suorempia menetelmiä.



Origosta nappulan voi siirtää vinoon ruutuun $(7, 7)$, josta edelleen pystysuoraan ruutuun $(7, 1)$ ja vaakasuoraan ruutuun $(2, 1)$. Kaikkiaan kolmella nappulan siirrolla syntyy siis ratsun siirto. Peilisymmetrian vuoksi kaikki siirrot origosta ruutuun $(\pm 2, \pm 1)$ pystyy tekemään kolmella nappulan siirrolla. Reittiä

$$(0,0) \xrightarrow{3 \text{ siirtoa}} (2,1) \xrightarrow{3 \text{ siirtoa}} (4,2) \to (-1,2)$$

pitkin pääsee origosta myös ruutuun $(-1, 2)$, ja peilisymmetrian vuoksi seitsemällä siirrolla kaikkiin ruutuihin $(\pm 1, \pm 2)$. Siis korkeintaan seitsemällä siirrolla pystyy synnyttämään kaikki ratsun siirrot eli siirtymään origosta ruutuhin $(\pm 2, \pm 1)$ ja $(\pm 1, \pm 2)$. Tunnetusti shakkiratsulla pääsee äärettömän ruudukon kaikkiin ruutuihin. Symmetrian vuoksi riittää nimittäin osoittaa, että ruutu $(1, 0)$ on tavoitettavissa. Koska ratsu pääsee siihen kolmessa siirrossa pitkin reittiä $(0, 0) \to (2, 1) \to (0, 2) \to (1, 0)$, niin tehtävän nappulalla pääsee ruutuun $(1, 0)$ origosta $3 + 3 + 7 = 13$ siirrossa.



Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	−	−	−
2.	−	+	+	−
3.	+	−	−	+

V1. Ympyräpohjaisen kartion pohjan säde on 1, kartion korkeus $\sqrt{3}$, joten tilavuus on $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. Neliöpohjaisen kartion pohjan ala on 4 ja korkeus $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$. Tilavuus on siis $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Tilavuudet voidaan siis laskea annetuilla tiedoilla, ne eivät ole kokonaislukuja, eivätkä ne ole samoja. Siis kohdat a, b ja c ovat väärin.

Verrataan nyt tilavuuksien suuruutta. Suuruusjärjestys säilyy, vaikka poistettaisiin nimittäjät ja korotettaisiin neliöön. Verrataan siis lukuja $3\pi^2$ ja $16 \cdot 2 = 32$. Koska $\pi < 3{,}2$ ja $3\pi < 10$, on pyramidin tilavuus suurempi. Siis kohta d on myös väärin.

V2. Polynomille $P(x)$ saa tekijöihinjaon, nimittäin $P(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $P(x) \geq 1$, joten nollakohtia ei ole. Polynomin kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, sillä

$$P(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = P(x).$$

Viimeisen kohdan yhtälön pystyy ratkaisemaan:

$$P(x) = 7 \iff x^4 + x^2 - 6 = 0 \iff (x^2-2)(x^2+3) = 0 \iff x^2 = 2 \lor x^2 = -3,$$

mutta edellisellä toisen asteen yhtälöllä ei ole rationaalisia eikä jälkimmäisellä edes reaalisia ratkaisuja. Siis kohdat b ja c ovat oikein ja muut väärin.

V3. a) Jos $x, y \in \,]0, \infty[$ ja $f(x) = f(y)$, niin

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) = f(y) = e^{f(y)-y-1} = e^{f(x)-y-1},$$

eli $f(x) - x - 1 = f(x) - y - 1$, eli $x = y$. Väite a siis pitää aina paikkaansa.

b) Jos väite b pitäisi paikkaansa, niin erityisesti olisi $f(1) < 1$. Mutta on oltava $f(1) > 1$. Siten väite b ei voi pitää paikkaansa.

c) Jos olisi olemassa $x \in \,]0, \infty[$, jolle olisi $f(x) = x + 1$, niin silloin olisi

$$x + 1 = e^{x+1-x-1} = 1,$$

eli olisi $x = 0$. Siten väite c ei pidä paikkaansa.

d) Olkoon $x \in \,]0, \infty[$. Koska

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) > 1,$$

on

$$e^{f(x)} > e^{x+1},$$

eli $f(x) > x + 1 > x$. Siten väite d pitää varmasti paikkaansa.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4. Sama kuin **P7.**

V5. Jos $k - 1$ on parillinen, niin huomataan, että pelinappulan x-koordinaatti pysyy aina parillisena. Jos siis tavoiteruudun x-koordinaatti on pariton, kuten ruudulla $(1, 0)$, niin Maija ei koskaan voi saavuttaa sitä. Siis Maija ei voi aina voittaa, jos k on pariton.

Osoitetaan nyt, että jos k on parillinen, niin Maija pystyy tavoittamaan minkä tahansa ruudun. Tällöin siirtämällä k kertaa oikealle ja $k-1$ kertaa ylös Maija pääsee ruutuun (k^2-k, k^2-k). Koska

$$\mathrm{syt}(k^2-k, k+1) = \mathrm{syt}(k(k-1), k+1) = \mathrm{syt}(k-1, k+1) = \mathrm{syt}(2, k+1) = 1,$$

niin yhdistämällä tätä siirtosarjaa diagonaalisiirtoihin ($k+1$ diagonaalilla) päästään ruutuun $(1,1)$. Vastaavasti päästään ruutuun $(1,-1)$. Nämä yhdistämällä päästään ruutuun $(2,0)$ ja vastaavasti ruutuun $(0,2)$. Koska $k-1$ ja $k+1$ ovat parittomia, päästään näiden siirtojen avulla ruutuihin $(\pm1, 0)$ ja $(0, \pm1)$. Näiden siirtojen avulla taas päästään mihin tahansa ruutuun.

V6. Yhtälöstä seuraa, että $x^4y^2 = 2019-2x = 2(1009-x)+1$ on pariton, joten sekä x että y on pariton. Erityisesti $y^2 \geq 1$. Kun $|x| \geq 7$, niin saadaan

$$x^4y^2+2x \geq x^4+2x \geq |x|^4-2|x| = |x|(|x|^3-2) \geq 7(7^3-2) = 7\cdot341 \geq 7\cdot300 = 2100 > 2019,$$

joten yhtälöllä ei tässä tapauksessa voi olla ratkaisua. Siis $|x| < 7$ ja luvun x parittomuuden vuoksi $|x| \leq 5$. Eri tapaukset on siten helppoa käydä läpi.

Kun $|x| = 1$, niin $x^4y^2 + 2x = 1 \cdot y^2 + 2x = y^2 + 2x$ ja yhtälö supistuu siis joko muotoon $y^2 + 2 = 2019$ eli $y^2 = 2017$ tai $y^2 - 2 = 2019$ eli $y^2 = 2021$. Luvut 2017 ja 2021 eivät kuitenkaan ole kokonaisluvun neliöitä, sillä $44^2 = 1936$ ja $45^2 = 2025$.

Kun $|x| = 3$, niin $x^4 = 3^4 = 81$ ja

$$x^4y^2 + 2x = 2019 \iff 81y^2 = 2019 - 2x.$$

Jos $x = 3$, niin $2019-2x = 2013$ ei ole luvulla 81 jaollinen, mutta jos $x = -3$, saadaan edelleen $2019-2x = 2025 = 81\cdot25 = 81\cdot5^2$. Siis $x = -3$, $y = \pm5$ on yhtälön ratkaisu.

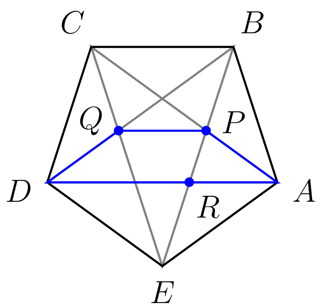
Kun $|x| = 5$, niin $x^4 = 5^4 = 625$. Jos $x = 5$, niin yhtälö supistuu muotoon $625y^2 = 2009$, jos taas $x = -5$, niin muotoon $625y^2 = 2029$. Kuitenkaan kumpikaan luvuista 2009 ja 2029 ei ole luvulla 625 jaollinen.

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on

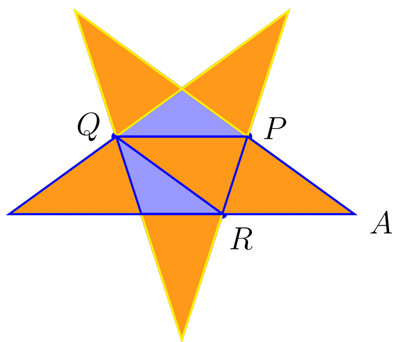
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm5. \end{cases}$$

Avoin sarja

A1. Olkoon R lävistäjien AD ja BE leikkauspiste.



Tarkastellaan seuraavaa tapaa paloitella tarkasteltavat alat.



Väitetään, että kuviossa jokaisella oranssiksi väritetyllä kolmiolla on sama ala a ja molemmilla vaaleansinisillä kolmioilla on sama ala b. Vaaleansinisten kolmioiden tapaus on helppo, sillä tähden sisälle syntyvä pieni viisikulmio on myös säännöllinen ja molemmat kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden kanta on säännöllisen viisikulmion lävistäjä ja kyljet tämän viisikulmion sivuja. Siten ne ovat yhteneviä ja niillä on sama ala. Oransseista kolmioista viisi on tähden sakaroita, kuten kolmio PRA, ja ne ovat säännöllisen viisikulmion säännöllisyyden vuoksi yhteneviä. Perustellaan, miksi PRA on yhtenevä myös kuudennen kolmion PQR kanssa. Säännöllisen viisikulmion lävistäjä on luonnollisesti yhdensuuntainen sen sivun kanssa, jonka kanssa sillä ei ole yhteistä kärkeä. Siis $PQ \parallel AD$, joten myös $PQ \parallel AR$. Samalla tavoin saadaan perusteltua $AP \parallel QR$, joten $APQR$ on suunnikas (itse asiassa neljäkäs). Tästä seuraa suoraan $\triangle PRA \cong \triangle RPQ$.

Edellisen tarkastelun perusteella nelikulmion $APQD$, joka koostuu kolmesta oranssista ja yhdestä vaaleansinisestä kolmiosta, ala on $3a+b$. Tähden ala on vastaavasti $6a+2b$. Koska $6a+2b=1$, niin $3a+b=\frac{1}{2}(6a+2b)=\frac{1}{2}$.

Vastaus: Nelikulmion $APQD$ pinta-ala on $\frac{1}{2}$.

A2. Sama kuin **V5.**

A3. Sama kuin **V6.**

A4. Osoitamme, että tavoiteltu luku on $k=10$. Koska toisaalta $F_9=34$ ja $F_{10}=55$, ja toisaalta $3^3=27<34$ ja $4^3=64>55$, on oltava $k \geqslant 10$, jos halutunlainen luku k on olemassa. Koska lisäksi toisaalta

$$F_{10}=55, \qquad F_{11}=89, \qquad F_{12}=144, \qquad F_{13}=233, \qquad F_{14}=377, \qquad \text{ja} \qquad F_{15}=610,$$

ja toisaalta

$$4^3=64, \qquad 5^3=125, \qquad 6^3=216, \qquad 7^3=343, \qquad \text{ja} \qquad 8^3=512,$$

on

$$F_{10}<4^3<F_{11}<5^3<F_{12}<6^3<F_{13}<7^3<F_{14}<8^3<F_{15}.$$

Riittää siis enää osoittaa, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant 15$ lukujen F_{n+1} ja F_n välistä löytyy kuutioluku. Tämä puolestaan seuraa välittömästi, jos $\sqrt[3]{F_{n+1}}-\sqrt[3]{F_n}>1$, sillä tällöinhän on olemassa kokonaisluku $\ell \in \left]\sqrt[3]{F_n}, \sqrt[3]{F_{n+1}}\right[$, jolloin $F_n < \ell^3 < F_{n+1}$. Tämän puolestaan voimme osoittaa arvioimalla

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{F_{n+1}} - \sqrt[3]{F_n} &= \frac{F_{n+1} - F_n}{\sqrt[3]{F_{n+1}^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}\,F_n} + \sqrt[3]{F_n^2}} = \frac{F_{n-1}}{\sqrt[3]{F_{n+1}^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}\,F_n} + \sqrt[3]{F_n^2}} \\
&> \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{F_{n+1}^2}} = \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(F_n + F_{n-1})^2}} = \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(2\,F_{n-1} + F_{n-2})^2}} \\
&> \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(3\,F_{n-1})^2}} = \frac{\sqrt[3]{F_{n-1}}}{3\sqrt[3]{9}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{F_{14}}{3^3 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{377}{243}} > 1.
\end{aligned}$$