

Neljän tieteen kisat
Peruskoulun matematiikkakilpailu
Alkukilpailu 23.9. – 6.10.2020
Tehtävät ja pisteytys
MAOL ry

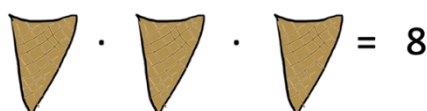
Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukilpailu 23.9. – 6.10.2020



Työskentelyaika 45 minuuttia. Ratkaise kaikki tehtävät **erilliselle paperille**. Perustele vastauksesi laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Palauta tämä tehtäväpaperi vastauspaperisi mukana. Laskinta ei saa käyttää. Sallitut välineet: lyijykynä, viivain, pyyhekumi.

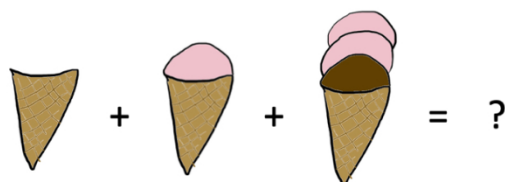
1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

1. Ratkaise viimeisen lausekkeen arvo vohvelien ja jäätelöpallojen avulla.


$$\text{vohveli} \cdot \text{vohveli} \cdot \text{vohveli} = 8$$


$$\text{jäätelö} + \text{jäätelö} = 10$$


$$\text{jäätelö} + \text{jäätelö} = 11$$


$$\text{vohveli} + \text{jäätelö} + \text{jäätelö} = ?$$

2. Laske.

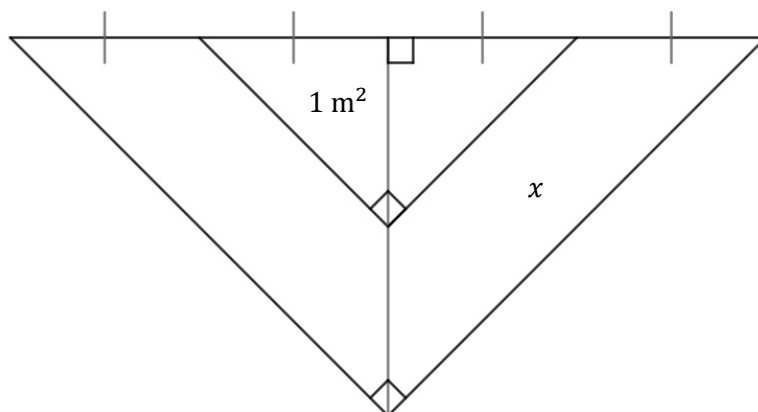
- $627 - 138$
- $\frac{3}{5} \cdot 1024,5$
- $(1 + 4 + 7 + 10 + 13) - (5 + 7 + 9 + 11 + 13)$
- $5 - 4 \cdot (6 - 0,5)$

3. Taneli valmistaa kankaisia kasvomaskeja hyväntekeväisyysmyyjäisiin. Hän myy maskeja 5 euron kappalehintaan.

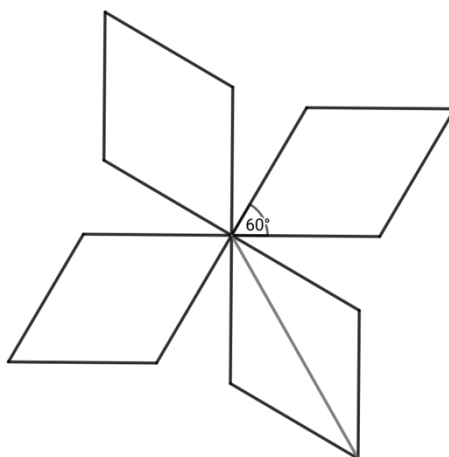
Yhteen kasvomaskiin tarvitaan $20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}$ kangasta. Taneli on ostanut 2 metriä 1,2 metriä leveää kangasta 12 euron metrihintaan. Hän käyttää kaiken kankaan kasvomaskeihin. Kasvomaskien vaatimat kuminauhut maksavat yhteensä 10 euroa.

Kuinka paljon rahaa menee hyväntekeväisyyteen, eli kuinka paljon rahaa tulee kulujen jälkeen, jos kaikki maskit menevät kaupaksi?

4. Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat tasakylkisiä. Ratkaise pinta-ala x .



5. Helsingin ja Siilinjärven välinen matka rautateitse on noin 480 km. Helsingistä lähtee juna kohti Siilinjärveä klo 11:13 ja Siilinjärveltä kohti Helsinkiä klo 10:57. Junat kohtaavat klo 13:34. Jos matka-aika kumpaankin suuntaan on sama, milloin junat ovat perillä?
6. Kolmion hypotenuusa, jonka pituus on x , on erään neliön halkaisija. Lisäksi tiedetään, että kyseinen kolmio on yhdenmuotoinen sellaisen kolmion kanssa, jonka sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5. Määritä kolmion lyhyemmän kateetin pituuden suhde neliön sivun pituuteen.
7. Eräs kokonaisluku toteuttaa seuraavat ehdot:
- Se on suurempi kuin 100 ja pienempi kuin 1 000.
 - Sen numeroiden summa on 8.
 - Se on parillinen.
 - Se ei ole jaollinen viidellä.
 - Sen kymmenten paikalla ei ole 1.
 - Sen satosten paikalla on suurempi numero kuin sen kymmenten paikalla.
- Mistä luvusta tai luvuista voi olla kyse?
8. Oheinen kuvio koostuu neljästä yhtenevästä suunnikkaasta. Kaikki keskustaan kohdistuvat kulmat ovat suuruudeltaan 60° . Suunnikkaiden pidempi lävistäjä on pituudeltaan 2, ja sivut ovat yhtä pitkät. Määritä koko kuvion pinta-ala.



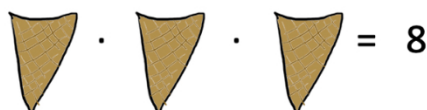
Grundskolans matematiktävling: inledande tävling 23.9. – 6.10.2020




Provtiden är 45 minuter. Lös alla uppgifter på **separat papper**. Motivera dina svar med räkneuttryck, figurer eller förklaringar. Returnera detta uppgiftspapper tillsammans med ditt svarpapper. Räknare får inte användas. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi.

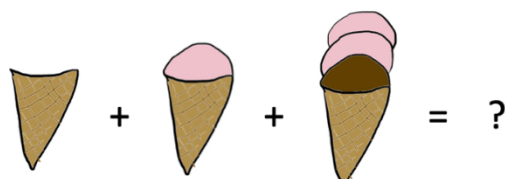
1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

1. Lös värdet för det sista uttrycket med hjälp av informationen om våfflor och glassbollarna.


$$\text{waffle} \cdot \text{waffle} \cdot \text{waffle} = 8$$


$$\text{ice cream} + \text{ice cream} = 10$$


$$\text{ice cream} + \text{ice cream} = 11$$


$$\text{waffle} + \text{ice cream} + \text{ice cream} = ?$$

2. Räkna.

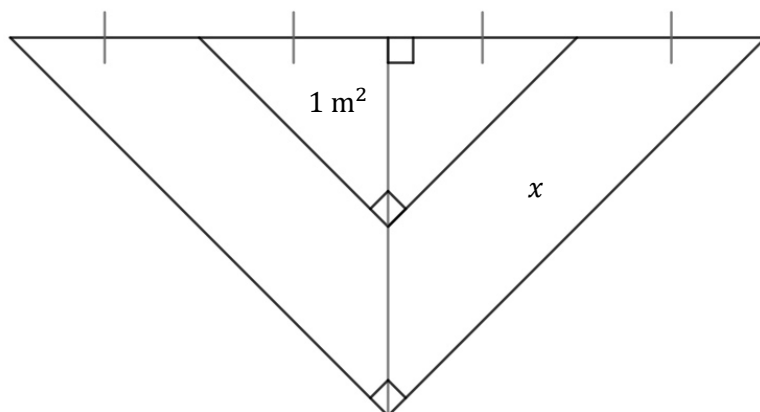
- $627 - 138$
- $\frac{3}{5} \cdot 1024,5$
- $(1 + 4 + 7 + 10 + 13) - (5 + 7 + 9 + 11 + 13)$
- $5 - 4 \cdot (6 - 0,5)$

3. Daniel tillverkar tygmasker som han säljer på ett välgörenhetsevenemang. Han säljer maskerna för 5 euro styck.

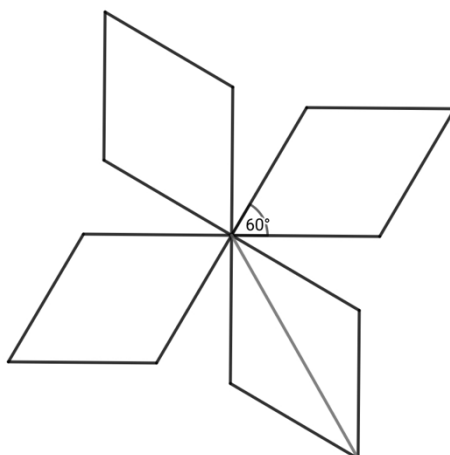
Till en mask behövs $20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}$ tyg. Daniel har köpt 2 meter 1,2 meter brett tyg för meterpriset 12 euro. Han använder allt tyg till tygmaskerna. De gummiband som behövs i tygmaskerna kostar totalt 10 euro.

Hur mycket pengar samlas in under välgörenhetsevenemanget, det vill säga hur stor är vinsten efter utgifterna, om alla masker säljs?

4. Figurens rätvinkliga trianglar är likbenta. Beräkna arean x .



5. Avståndet mellan Helsingfors och Siilinjärvi med tåget är ungefär 480 km. Ett tåg avgår från Helsingfors mot Siilinjärvi kl. 11:13 och ett annat från Siilinjärvi mot Helsingfors kl. 10:57. Tågen möts klockan 13:34. När är tågen framme om resetiden i båda riktningarna är lika?
6. Hypotenusan i en triangel, vars längd är x , är diagonal i en viss kvadrat. Vi vet också att triangeln i fråga är likformig med en sådan triangel som har sidlängderna 3, 4 och 5. Bestäm triangelns kortare katets längds förhållande till kvadratens sidas längd.
7. Ett heltal uppfyller följande villkor:
2. Det är större än 100 och mindre än 1000.
 3. Summan av talets siffror är 8.
 4. Det är ett jämnt tal.
 5. Det är inte delbart med fem.
 6. Tiootalssiffran är inte 1.
 7. Hundratalssiffran är större än tiootalssiffran.
- Vilket eller vilka tal kan det vara fråga om?
8. Figuren här invid består av fyra kongruenta parallelogram. Alla vinklar som står mot figurens mitt är 60 grader. Parallelogrammens längre diagonal har längden 2, och sidorna har samma längd. Bestäm hela figurens area.



Comprehensive school mathematics competition 23rd of Sep – 6th of Oct 2020



The time allotted is 45 minutes. Write your solutions on a **separate paper**. Remember to show your work: with figures, in equations, or in words. Hand this paper in. Using a calculator is not allowed. You may use a pencil, ruler, and an eraser.

1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

1. Solve the value of the final expression based on what is known about the waffles and the balls of ice cream.

$$\text{waffle} \cdot \text{waffle} \cdot \text{waffle} = 8$$

$$\text{ice cream} + \text{ice cream} = 10$$

$$\text{ice cream} + \text{ice cream} = 11$$

$$\text{waffle} + \text{ice cream} + \text{ice cream} = ?$$

2. Find.

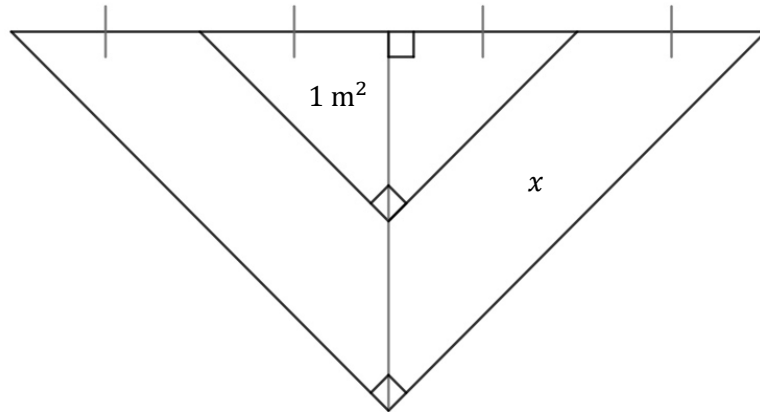
- $627 - 138$
- $\frac{3}{5} \cdot 1024,5$
- $(1 + 4 + 7 + 10 + 13) - (5 + 7 + 9 + 11 + 13)$
- $5 - 4 \cdot (6 - 0,5)$

3. Daniel is sowing DIY face masks for a charity event. He sells them for 5 euros per piece.

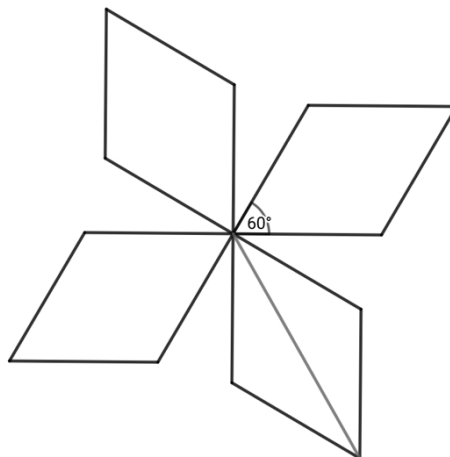
For each mask, Daniel needs a $20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}$ piece of fabric. He has bought 2 metres of fabric that is 1,2 metres wide for 12 euros per metre. Daniel uses up all of the fabric for the masks. In addition, the rubber bands for the masks total 10 euros.

How much money does Daniel donate for the charity, or, in other words, how much money does Daniel get after subtracting his material costs, provided that he sells all his masks?

4. The right triangles in the figure below are isosceles. Solve the area marked x .



5. The distance from Helsinki to Siilinjärvi by train is approximately 480 km. A train departs from Helsinki for Siilinjärvi at 11:13, and a train from Siilinjärvi for Helsinki at 10:57. The trains pass by each other at 13:34. If the trains take as long a time to travel from Helsinki to Siilinjärvi as from Siilinjärvi to Helsinki, when do the trains arrive at their destinations?
6. The hypotenuse of a triangle is the diagonal of a square. The length of this diagonal is x . Moreover, the triangle is similar to one with side lengths 3, 4, and 5. Find the ratio of length of the shorter cathetus to that of the side of the square.
7. Find all integers with the following properties:
- It is greater than 100 and lesser than 1 000.
 - The sum of its numbers is 8.
 - It is even.
 - It is not divisible by five.
 - The digit at its tens' place is not 1.
 - The digit at its hundreds' place is greater than that at its tens' place.
8. The figure below consists of four congruent parallelograms. The angles that face towards the centre are 60 degrees. The length of the longer diagonals of the parallelograms is 2, and the sides are of equal length. Find the area of the whole figure.



Pisteytysohje ja malliratkaisuja

Tehtävä 1.

Lausekkeen arvo on 16 (1p), sillä vohvelin arvo on 2 (1p), vaaleanpunaisen arvo on jäätelöpallon 3 (1p) ja ruskean jäätelöpallon arvo on 1 (1p).

Tehtävä 2.

3a. 489 (1p)

3b. 614,7 (1p)

3c. -10 (1p)

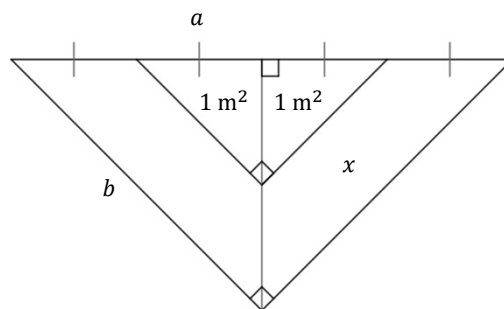
3d. -17 (1p)

Tehtävä 3.

Tanelin kangaskulut ovat $2 \cdot 12 \text{ €} = 24 \text{ €}$ ja kuminauhakulut 10 € , eli kulut ovat yhteensä 34 € (1p). Kasvomaskoja saa kankaalle vierekkäin 6 ja kankaan pituussuuntaan yhteensä 10, eli kangasmaskeja kankaasta 60 (1p). Kun kaikki on myyty, on tuloja 300 € (1p). Voittoa tulee hyväntekeväisyyteen siis $300 \text{ €} - 34 \text{ €} = 266 \text{ €}$ (1p).

Tehtävä 4.

Tehtävän voi ratkaista monella eri menetelmällä. Seuraavissa merkitään kuvaan merkittyjen neljän yhtä pitkän janan pituutta symbolilla a .



- **Sivujen pituuksilla pinta-aloista.** Koska pienen tasakylkisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala on 1, on voimassa

$$1 = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Ratkaisemalla saadaan kateettien pituudeksi $\sqrt{2}$ (1p). Puolikkaan kuvion kateetin pituus on siis $2\sqrt{2}$ (1p). Puolikkaan kuvion pinta-ala on

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4. (1p)$$

Koska $x + 1 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$, saadaan $x = 3 \text{ m}^2$. (1p)

- **Suhteen avulla.** Koska kahden yhdenmuotoisen kuvion pinta-alojen suhde on näiden vastinsivujen pituuksien suhteen neliö (2p), saadaan

$$\frac{x + 1 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} = \left(\frac{2a}{a}\right)^2 = 4. (1p)$$

Ratkaisemalla saadaan $x + 1 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$ ja tästä $x = 3 \text{ m}^2$. (1p)

8. **Pythagoraan lausetta hyödyntämällä.** Koska pienen tasakylkisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala on 1, on voimassa

$$1 = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Ratkaisemalla saadaan kateettien pituudeksi $\sqrt{2}$ (1p). Neljä tämän pituista janaa muodostaa hypotenuusan tasakylkiselle suorakulmaiselle kolmiolle. Jos tämän kateettien pituus on b , niin Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 &= (4a)^2 \\ 2b^2 &= 16 \cdot 2 \\ b^2 &= 16 \\ b &= 4, (1p) \end{aligned}$$

ja tämän perusteella koko kuvion pinta-alan avulla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{b \cdot b}{2} &= x + 1 + x + 1 (1p) \\ \frac{16}{2} &= 2x + 2 \\ 2x &= 8 - 2 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3. (1p) \end{aligned}$$

Tehtävä 5.

Junien lähtöaikojen välinen aika on $11:13 - 10:57 = 0:16$ (1p). Lisäksi aika Helsingin-lähdöstä junien kohtaamiseen on $13:34 - 11:13 = 2:21$ (1p). Junien kohtaamishetki on puolivälissä sitä matkaa, joka Siilinjärven-lähdöllä on jäljellä ensimmäisten 16 minuutin jälkeen. Matka-aika on siis $2 \cdot 2:21 + 0:16 = 4:42 + 0:16 = 4:58$ (1p). Koska matka-aika on kumpaankin sama, Siilinjärven-lähdön saapumisaika on $10:57 + 4:58 = 15:55$ (½p) ja Helsingin-lähdön saapumisaika on $11:13 + 4:58 = 16:11$ (½p).

Tehtävä 6.

Yhdenmuotoisuuden perusteella kolmion sivut ovat pituuksiltaan $3y$, $4y$ ja $5y$, joissa $y > 0$ (1p). Toisaalta pisin sivu on hypotenuusa, ja siis $5y = x$. Lyhyimmän kateetin pituus on siis $3y = \frac{3x}{5}$ (1p).

Lisäksi Pythagoraan lauseella saadaan neliön sivun pituudeksi $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (1p). Kysytty suhde on siis

$$\frac{3x}{5} : \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}. (1p)$$

Tehtävä 7.

Kolminumeroinen luku on muotoa abc . Parillisuudesta seuraa, että c voi olla 0, 2, 4, 6 tai 8. Siitä, että numeroiden summa on 8, seuraa, että c ei voi olla 8. Siitä, että luku ei ole jaollinen viidellä, seuraa, että c ei voi olla 0. (1p)

Ylläoleviin ehtoihin sopivat siis: **206, 404, 602**, 116, 314, 224, 134, 512, 422, 332, 242, 152 (1p). Toisaalta kymmenten paikalla ei voi olla 1, joten näistä jäävät jäljelle: **206, 404, 602**, 224, 134, 422, 332, 242, 152 (1p). Koska **satasten** paikalla olevan numeron on oltava suurempi kuin kymmenten paikalla oleva luku, kaikki ehdot toteuttavat luvut ovat **206, 404, 422, 602** (1p).

Tehtävä 8.

Selvitetään ensin yhden suunnikkaan pinta-ala ja kerrotaan tämä neljällä.

Koska suunnikkaan yksi kulma on 60 astetta ja koska suunnikkaiden sivut ovat yhtä pitkät (kts. päivitetty tehtävänanto), sen voi jakaa kahdeksi tasasivuiseksi kolmioksi (1p).

Merkitään tämän sivun pituutta symbolilla x . Koska suunnikkaan lävistäjän pituus on 2, tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituus on 1. Siis Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1^2 &= x^2 \\ \frac{x^2}{4} + 1 &= x^2 \\ \frac{3x^2}{4} &= 1 \\ x^2 &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{2}{\sqrt{3}} (1p). \end{aligned}$$

Koska suunnikkaat koostuvat kahdesta tasasivuisesta kolmiosta, joilla on yksi yhteinen sivu, seuraa, että suunnikkaat ovat neljäkkäitä, joiden sivujen pituus on $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (1p) ja joiden korkeusjanat ovat pituudeltaan 1. Siis koko kuvion pinta-ala on

$$4 \cdot x \cdot 1 = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} (1p).$$