# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

5. 10. 2020

*Ratkaisut.*

**1.** Tasasivuisen kolmion ja neliön piirit ovat yhtä suuret. Tällöin neliön pinta-alan suhde kolmion pinta-alaan on

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $> 1$ | b) $> 2$ | c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | d) $\frac{9}{4\sqrt{3}}$ |

**Ratkaisu.** Kolmion sivu $a$ ja neliön $b$, $3a = 4b$. Kolmion pinta-ala $\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ ja neliön $b^2$. Alojen suhteeksi saadaan

$$\frac{b^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16}{9}b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

**2.** Olkoon $x > 0$, $y > 0$ ja $xy > 1$. Lauseke

$$\frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^x \left(x - \frac{1}{y}\right)^y \left(y + \frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(y - \frac{1}{x}\right)^y}$$

sievenee muotoon

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $(x+y)^{x-y}$ | b) $\dfrac{(x-y)^x}{(x+y)^y}$ | c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}$ | d) $(x-y)^{x+y}$ |

**Ratkaisu.** Sievennetään

$$\frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^x \left(x - \frac{1}{y}\right)^y \left(y + \frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(y - \frac{1}{x}\right)^y} = \frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^x \left(\frac{xy-1}{y}\right)^y \left(\frac{yx+1}{x}\right)^{-x}}{\left(\frac{xy-1}{x}\right)^y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

**3.** Puutarhan hedelmäpuista 55% on omenapuita ja 45% päärynä- ja kirsikkapuita. Kirsikkapuita on 25% enemmän kuin päärynäpuita. Puutarhan puista on kirsikkapuita tällöin

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 20% | b) 25% | c) 30% | d) $< \frac{2}{5}$ |

**Ratkaisu.** Olkoon puiden kokonaismäärä $y$. Nyt päärynä- ja kirsikkapuita on $0{,}45y$. Jos päärynäpuiden määrä on $x$, niin kirsikkapuita on $1{,}25x$. Siispä $x + 1{,}25x = 0{,}45y$, eli $2{,}25x = 0{,}45y$ ja $x = \frac{0{,}45}{2{,}25}y = \frac{5}{25}y = \frac{1}{5}y$. Koska päärynäpuita on $\frac{1}{5}y$, on kirsikkapuita 25 prosenttia kaikista puista, eli vaihtoehdot 25% ja $< \frac{2}{5}$ ovat oikein.

**4.** Olkoot $a$ ja $n$ positiivisia kokonaislukuja. Millä seuraavista luvuista erotus $a^{n+4} - a^n$ on varmasti jaollinen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 4 | b) 15 | c) 8 | d) 9 |

**Ratkaisu.** Jos $a = 2$ ja $n = 1$, on $a^{n+4} - a^n = 32 - 2 = 30$, joten luku ei ole välttämättä yhdeksällä, kahdeksalla tai neljällä jaollinen. Koska

$$a^{n+4} - a^n = a^n \left(a^4 - 1\right) = \left(a^2 + 1\right)(a-1)a^n(a+1),$$

on tulossa aina kolme peräkkäistä kokonaislukua, joten se on jaollinen kolmella. Lisäksi jos jokin luvuista $a$, $a - 1$ ja $a + 1$ on jaollinen viidellä, on tulo varmasti jaollinen luvulla 15. Jos taas mikään näistä ei ole jaollinen viidellä, on luvun $a$ jakojäännös viidellä jaettaessa joko 2 tai 3. Näissä tapauksissa:

$$(5k+2)^2+1 = 25k^2+20k+5 = 5(5k^2 4k+1) \quad \text{ja} \quad (5k+3)^2+1 = 25k^2+30k+10 = 5(5k^2+6k+2),$$

eli tekijä $a^2 + 1$ on jaollinen luvulla 5. Joka tapauksessa luku on siis jaollinen 15:llä.

**5.** Jos reaaliluku $x$ toteuttaa ehdot $|x| < 10$ ja $x \neq 1$, silloin $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

a) on aina $> 3$
b) voi olla $> 21$ sopivalla $x$
c) on aina $< 20$
d) annetut lähtötiedot eivät mahdollista mitään edellisiä päätelmiä

**Ratkaisu.** Jos $|x| < 10$, niin $|2x| < 20$, joten $-20 < 2x < 20$, joten $-41 < 2x - 2x < -1$, ja siis $|2x - 2| > 1$. Nyt

$$\left|\frac{2x}{2x-21}\right| = \frac{|2x|}{|2x-21|} < \frac{20}{1} = 20,$$

joten väite c) on ainakin tosi. Väitteet b) ja d) eivät siis voi olla tosia. Jos valitaan $x = -9$, saadaan

$$\left|\frac{2x}{2x-21}\right| = \frac{18}{39} < 1,$$

joten myöskään väite a) ei ole tosi.

**6.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ positiivisia reaalilukuja, joille jokainen tuloista $abc$, $abd$, $acd$ ja $bcd$ on rationaaliluku. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Tulo $abcd$ on rationaalinen.
b) Summa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on rationaalinen.
c) Summa $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ on rationaalinen.
d) Jos myös summa $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ on rationaalinen, niin $a$ on rationaalinen.

**Ratkaisu.** Tunnetusti kuutiojuuret $\sqrt[3]{2}$ ja $\sqrt[3]{4}$ eivät ole rationaalisia. Jos $a = b = c = d = \sqrt[3]{2}$, niin tällöin

$$abc = abd = acd = bcd = 2,$$

eli nämä tulot ovat rationaalisia, mutta lausekkeet

$$abcd = 2\sqrt[3]{2} \qquad \text{ja} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4\sqrt[3]{4}$$

eivät ole rationaalisia. Siten väitteet a) ja b) eivät aina ole tosia.

Voimme todeta, että jokainen kuutioista

$$a^3 = \frac{abc \cdot abd \cdot acd}{(bcd)^2}, \; b^3 = \frac{abc \cdot abd \cdot bcd}{(acd)^2}, \; c^3 = \frac{abc \cdot acd \cdot bcd}{(abd)^2}, \; d^3 = \frac{abd \cdot acd \cdot bcd}{(abc)^2}$$

on rationaalinen. Täten summan $a^3+b^3+c^3+d^3$ on myös varmasti oltava rationaalinen, ja väitteen c) tosi.

Lopuksi, olettakaamme, että summa $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ on rationaalinen. Voimme todeta, että tulot

$$a^2\,b = \frac{abc \cdot abd}{bcd}, \quad a^2\,c = \frac{abc \cdot acd}{bcd}, \quad a^2\,d = \frac{abd \cdot acd}{bcd}$$

ovat kaikki rationaalisia. Koska

$$a\,(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = a^2\,b + a^2\,c + a^2\,d + abc + abd + acd,$$

ja koska jokainen oikean puolen termeistä on rationaalinen, on myös osamäärän

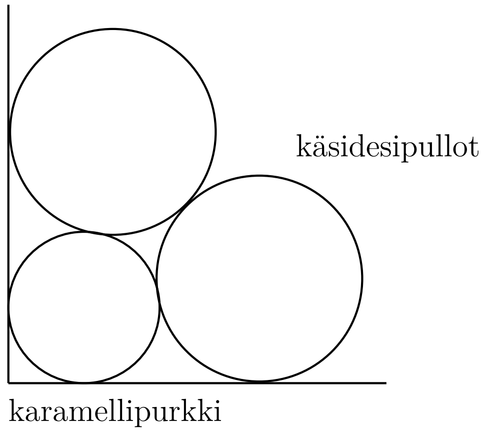
$$a = \frac{a^2\,b + a^2\,c + a^2\,d + abc + abd + acd}{ab + ac + ad + bc + bd + cd}$$

oltava rationaalinen, ja väite d) on varmasti tosi.

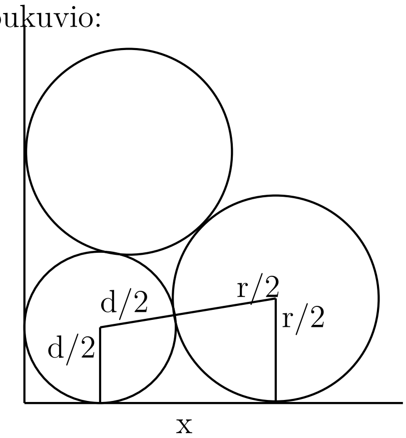
**7.** Opettaja keksii harjoituksen, jossa treenataan vähennyslaskuja. Opettaja kirjoittaa taululle luvut $1, 2, \ldots, 100$. Kukin oppilas tulee vuorollaan taululle, pyyhkii pois kaksi lukua ja kirjoittaa taululle niiden erotuksen. Opettaja vilkaisee taululle vasta kun viimeisenä vuorossa oleva oppilas pyyhkii pois kaksi viimeistä lukua ja kirjoittaa niiden erotuksen, joka on 7. Opettaja silmäilee luokkaa ja toteaa: ”Joku teistä laski väärin.” Mistä hän tiesi?

**Ratkaisu.** Jos taululta pyyhitään kaksi parillista numeroa, on erotus parillinen. Samoin jos pyyhitään kaksi paritonta numeroa, on erotus parillinen. Jos oppilas pyyhkii parittoman ja parillisen numeron, on erotus pariton. Kaikissa tapauksissa parittomien numeroiden lukumäärä joko pysyy samana tai vähenee kahdella. Koska parittomia numeroita oli aluksi 50, ei niitä missään vaiheessa voi olla paritonta määrää. Siis viimeisen numeron on oltava parillinen, jos kaikki ovat laskeneet oikein.

**8.** Jukka on löytänyt loistavan piilopaikan karamellipurkilleen kahden lieriönmuotoisen käsidesipullon takaa suorakulmaisessa nurkassa (ks. kuva). Kuinka suuri voi olla purkin halkaisija $d$ korkeintaan, kun purkin halutaan olevan täysin piilossa ja käsidesipullojen halkaisijat ovat $r$?



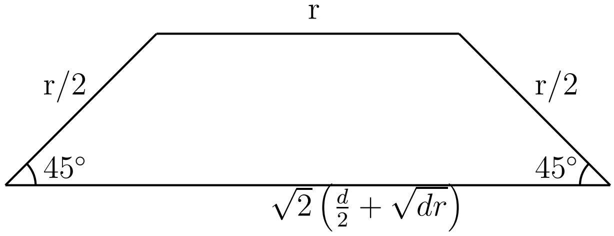

**Ratkaisu.** Piirretään apukuvio:




Tuntematon $x$ voidaan ratkaista, kun huomataan, että kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $\frac{d+r}{2}$ ja toinen kateetti $|\frac{r-d}{2}|$. Siispä

$$x^2 = \left(\frac{d+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-d}{2}\right)^2 = dr$$

Lisäksi nurkan etäisyys siitä pisteestä, jossa $\frac{d}{2}$-säteinen ympyrä sivuaa seinää on $\frac{d}{2}$. Täten niiden pisteiden etäisyys toisistaan, joissa käsidesipullot sivuavat seinää on $\sqrt{2}\left(\frac{d}{2} + dr\right)$. Yhdistämällä käsidesipullojen keskipisteet toisiinsa ja siihen pisteeseen, jossa pullo sivuaa seinää, saadaan seuraava kuvio:



Tästä saadaan helposti yhtälö

$$\sqrt{2}\left(\frac{d}{2}+\sqrt{dr}\right)=r+2\frac{r}{2\sqrt{2}},$$

josta saadaan

$$\sqrt{2}\left(\frac{d}{2}+\sqrt{dr}\right)=r+2\frac{r}{2\sqrt{2}}=r\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

eli

$$\frac{d}{\sqrt{2}}+\sqrt{2dr}-r\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0,$$

josta toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\sqrt{d}=\frac{-\sqrt{2r}\pm\sqrt{(\sqrt{2r})^2+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}r\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{r}\pm\sqrt{r\left(2+\sqrt{2}\right)}.$$

Ainoastaan plusmerkillinen kelpaa, joten joten

$$d=\left(-\sqrt{r}+\sqrt{r\left(2+\sqrt{2}\right)}\right)^2=r\left(1+2+\sqrt{2}-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=r\left(3+\sqrt{2}-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

5. 10.

2020

*Ratkaisut*

**1.** Tasasivuisen kolmion ja neliön piirit ovat yhtä suuret. Tällöin neliön pinta-alan suhde kolmion pinta-alaan on

a) $> 1$ b) $> 2$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

**Ratkaisu.** Kolmion sivu $a$ ja neliön $b$, $3a = 4b$. Kolmion pinta-ala $\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ ja neliön $b^2$. Alojen suhteeksi saadaan

$$\frac{b^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16}{9}b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

**2.** Jos reaaliluku $x$ toteuttaa ehdot $|x| < 10$ ja $x \neq 1$, silloin $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

a) on aina $> 3$
b) voi olla $> 21$ sopivalla $x$
c) on aina $< 20$
d) annetut lähtötiedot eivät mahdollista mitään edellisiä päätelmiä

**Ratkaisu.** Jos $|x| < 10$, niin $|2x| < 20$, joten $-20 < 2x < 20$, joten $-41 < 2x - 2x < -1$, ja siis $|2x - 2| > 1$. Nyt

$$\left|\frac{2x}{2x-21}\right| = \frac{|2x|}{|2x-21|} < \frac{20}{1} = 20,$$

joten väite c) on ainakin tosi. Väitteet b) ja d) eivät siis voi olla tosia. Jos valitaan $x = -9$, saadaan

$$\left|\frac{2x}{2x-21}\right| = \frac{18}{39} < 1,$$

joten myöskään väite a) ei ole tosi.

**3.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ positiivisia reaalilukuja, joille jokainen tuloista $abc$, $abd$, $acd$ ja $bcd$ on rationaaliluku. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Tulo $abcd$ on rationaalinen.
b) Summa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on rationaalinen.
c) Summa $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ on rationaalinen.
d) Jos myös summa $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ on rationaalinen, niin $a$ on rationaalinen.

**Ratkaisu.** Tunnetusti kuutiojuuret $\sqrt[3]{2}$ ja $\sqrt[3]{4}$ eivät ole rationaalisia. Jos $a = b = c = d = \sqrt[3]{2}$, niin tällöin

$$abc = abd = acd = bcd = 2,$$

eli nämä tulot ovat rationaalisia, mutta lausekkeet

$$abcd = 2\sqrt[3]{2} \qquad \text{ja} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4\sqrt[3]{4}$$

eivät ole rationaalisia. Siten väitteet a) ja b) eivät aina ole tosia.

Voimme todeta, että jokainen kuutioista

$$a^3 = \frac{abc \cdot abd \cdot acd}{(bcd)^2},\ b^3 = \frac{abc \cdot abd \cdot bcd}{(acd)^2},\ c^3 = \frac{abc \cdot acd \cdot bcd}{(abd)^2},\ d^3 = \frac{abd \cdot acd \cdot bcd}{(abc)^2}$$

on rationaalinen. Täten summan $a^3+b^3+c^3+d^3$ on myös varmasti oltava rationaalinen, ja väitteen c) tosi.

Lopuksi, olettakaamme, että summa $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ on rationaalinen. Voimme todeta, että tulot

$$a^2\, b = \frac{abc \cdot abd}{bcd}, \quad a^2\, c = \frac{abc \cdot acd}{bcd}, \quad a^2\, d = \frac{abd \cdot acd}{bcd}$$

ovat kaikki rationaalisia. Koska

$$a\,(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = a^2\, b + a^2\, c + a^2\, d + abc + abd + acd,$$

ja koska jokainen oikean puolen termeistä on rationaalinen, on myös osamäärän

$$a = \frac{a^2\, b + a^2\, c + a^2\, d + abc + abd + acd}{ab + ac + ad + bc + bd + cd}$$

oltava rationaalinen, ja väite d) on varmasti tosi.

**4.** Määritä kaikki suorakulmaiset kolmiot, joiden sivut ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä.

**Ratkaisu.** Kolmion sivut voidaan kirjoittaa muodossa $b$, $c$ ja $\frac{b+c}{2}$. Pisin sivu on hypotenuusa. Koska keskiarvo ei voi olla pisin, voidaan olettaa, että hypotenuusa on $c$. Saadaan yhtälö

$$b^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = c^2,$$

eli

$$4b^2 + b^2 + c^2 + 2bc = 4c^2,$$

joka sievenee muotoon

$$5b^2 + 2bc - 3c^2 = 0,$$

josta saadaan (Huom! $c \neq 0$)

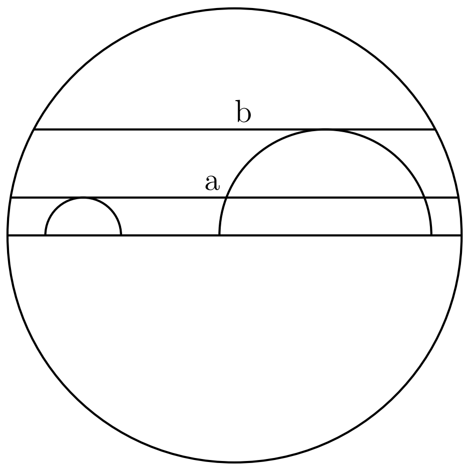
$$5\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 2\frac{b}{c} - 3 = 0,$$

jolloin

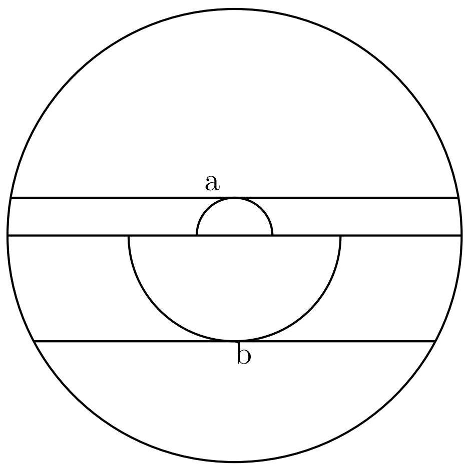
$$\frac{b}{c} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}.$$

Suhdeluku ei voi olla negatiivinen, joten $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$. Ainoat ehdon täyttävät kolmiot ovat siis yhteneviä sellaisen suorakulmaisen kolmion kanssa, jonka sivut ovat $3, 4, 5$. Tällainen kolmio selvästi toteuttaa ehdon, sillä erotus on vakio.

**5.** Kuvan ympyrän halkaisijalle piirretään kaksi puoliympyrää. Määritä jänteiden pituuksien $a$ ja $b$ funktiona se pinta-ala, joka jää jäljelle, kun puoliympyrät leikataan kuviosta pois. Jänteet ovat yhdensuuntaisia halkaisijan kanssa. Voidaan olettaa tunnetuksi, että puoliympyrät eivät leikkaa toisiaan eivätkä ole päällekkäin.




**Ratkaisu.** Siirretään toinen puoliympyrä ympyrän alapuolelle, toinen pysyy yläpuoliskossa. Siirretään lisäksi molempien puoliympyröiden keskipisteet ison ympyrän keskipisteeseen:



Oletetaan, että ison ympyrän säde on $r$. Tällöin ison ympyrän ala on $\pi r^2$. Tarkastellaan puoliympyrää, joka sivuaa jännettä, jonka pituus on $a$. Piirretään jana ison ympyrän keskipisteestä tämän jänteen ja ison ympyrän kaaren leikkauspisteeseen. Pikkupuoliympyrän säteen neliöksi saadaan näin $r^2 - \frac{a^2}{2^2}$. Tämän puoliympyrän ala on siis $\frac{\pi}{2}\left(r^2 - \frac{a^2}{2^2}\right)$. Vastaavasti toisen puoliympyrän ala on $\frac{\pi}{2}\left(r^2 - \frac{b^2}{2^2}\right)$. Yhteensä jäljelle jäänyt ala on siis $\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2)$.

**6.** Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö $x^4 - y^4 = 2020$.

**Ratkaisu.** Voidaan olettaa lukujen $x$ ja $y$ olevan epänegatiivisia. Tällöin $x > y$. Koska

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$$

ja $101 > 2^2 \cdot 5 = 20$, sekä $x^2 + y^2 \geq x^2 - y^2$, on oltava $101 \mid (x^2 + y^2)$. Lisäksi on oltava $x^2 + y^2 \equiv x^2 - y^2 \mod 2$. Nyt on itse asiassa molempien lukujen oltava kahdella jaollisia. Siispä $202 \mid (x^2 + y^2)$ ja $2 \mid (x^2 - y^2)$. Tarkasteltavana on kaksi tapausta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 202 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1010 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}.$$

Ensimmäisessä tapauksessa on $2x^2 = 212$, eli $x^2 = 106$, eli ei kokonaislukuratkaisuja. Toisessa tapauksessa taas $2x^2 = 1012$, eli $x^2 = 506$, ja tällöinkään ei ole ratkaisuja.

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

5. 10. 2020

*Ratkaisut.*

**1.** Vanhoilla herroilla Niemi, Ranta ja Saari on jokaisella yksi poika. Poikien etunimet ovat Asko, Esko ja Usko. Jokaisella on isänsä sukunimi. Lisäksi tiedetään, että

1) Vanha herra Ranta on kalju.
2) Eskon hiukset ovat hartioille asti.
3) Vanha herra Niemi ei ole koskaan ollut lentokoneessa.
4) Eskon isällä on lyhyet hiukset.
5) Yksi vanhoista herroista on kokenut lentäjä ja hänen hiuksensa ovat yhtä pitkät kuin Eskolla.
6) Uskon isä kalastaa vanhan herra Saaren kanssa sunnuntaisin.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin huolellisesti ja loogisesti perustellen.

a) Mikä on Askon sukunimi?

b) Kuka vanhoista herroista on lentäjä?

c) Mikä on Eskon sukunimi?

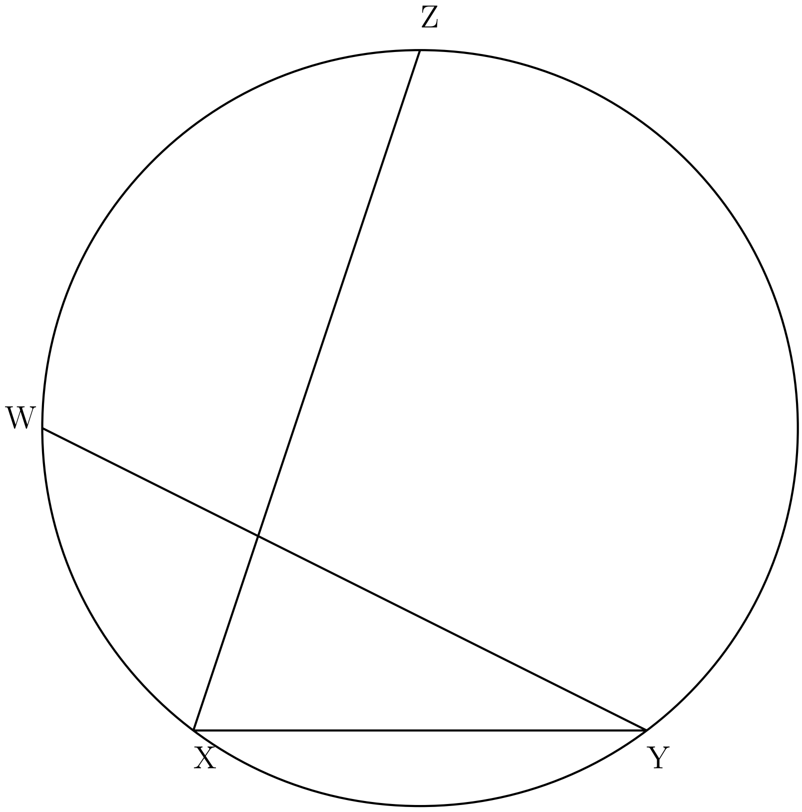
**Ratkaisu.** Tehdään seuraavia havaintoja: Uskon sukunimi ei ole Saari, sillä Uskon isä kalastaa vanhan herra Saaren kanssa. Lisäksi Eskon sukunimi ei ole Ranta, koska Eskon isällä on lyhyet hiukset ja vanha herra Ranta on kalju. Vanha herra Ranta ei myöskään ole kokenut lentäjä, sillä kokeneen lentäjän hiukset ovat yhtä pitkät kuin Eskolla, jolla on hartioille asti hiukset. Lentäjä ei myöskään ole Niemi, sillä vanha herra Niemi ei ole koskaan ollut lentokoneessa. Lentäjän on pakko olla siis Saari.

Lentäjän hiukset ovat yhtä pitkät kuin Eskolla, eli hartioille. Koska Eskon isän hiukset ovat lyhyet, ei Eskon isä voi olla Saari eikä Ranta. Eskon sukunimi on siis Niemi.

Koska Esko on Niemi ja Usko ei ole Saari, on Askon pakko olla Saari.

Siispä: a) Saari b) Saari c) Niemi.

**2.** Ympyrän kehältä on valittu neljä eri pistettä $A$, $B$, $C$ ja $D$, tässä järjestyksessä, ja ne jakavat kehän kaariin $AB$, $BC$, $CD$ ja $DA$, joiden keskipisteet ovat $X$, $Y$, $Z$ ja $W$, tässä järjestyksessä. Osoita, että janojen $XZ$ ja $YW$ leikkauskulma on suora kulma.




Huomataan, että pisteeseen $X$ muodostuva kulma (piirretty kuvaan) on jännettä $YZ$ vastaava kehäkulma. Pisteeseen $Y$ piirretty kulma taas puolestaan on jännettä $XW$ vastaava kehäkulma. Koska $YZ$ ja $XW$ kattavat yhteensä puolet kehästä, on vastaava keskuskulma 180 astetta, ja pisteisiin $X$ ja $Y$ muodostuneiden kulmien summa siis 90 astetta. Täten leikkauskulma on suora.

**3.** Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^{12} \end{cases}$$

positiivisten reaalilukujen $x$ ja $y$ joukossa.

**Ratkaisu.** Todetaan ensin, että jos $x = 1$, niin myös $y = 1$, ja toisinpäin, eli mikäli $y = 1$, niin $x = 1$. Nyt voidaankin olettaa, että molemmat ovat erisuuria kuin yksi.

Yhtälöparin jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $y = x^{12/(x+y)}$. Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön:

$$x^{x+y} = x^{36/(x+y)},$$

joten $x + y = \frac{36}{x+y}$. Koska $x$ ja $y$ ovat positiivisia, pätee $x + y = 6$. Yhtälöpari muuttuu nyt muotoon

$$\begin{cases} x^6 = y^3 \\ y^6 = x^{12} \end{cases}$$

, eli $y = x^2$. Sijoitetaan tämä yhtälöön $x + y = 6$ ja saadaan $x^2 + x = 6$, josta tekijöihin jakamalla saadaan $(x+3)(x-2) = 0$. Ratkaisu $x = -3$ ei kelpaa. Siispä $x = 2$. Tällöin $y = 4$ ja tämä todellakin toteuttaa yhtälöparin, sillä

$$\begin{cases} 2^6 = 4^3 \\ 4^6 = 2^{12}. \end{cases}$$

**4.** Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $x$ ja $y$, joilla pätee $x! = y^2 - 2020$.

**Ratkaisu.** Huomataan ensin, että jos $\geq 5$, niin $5 \mid x!$, joten $5 \mid y^2$, jolloin $5 \mid y$ ja $5^2 \mid y^2$. Jos siis $x \geq 10$, niin $5^2 \mid x!$ ja $5^2 \mid (y^2 - x!)$, eli $5^2 \mid 2020$, mikä ei ole mahdollista. Siispä $x \geq 9$. Huomataan, että $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ ja $46^2 = 2116$. Kun $x = 1, 2, 3, 4$, ovat lausekkeen $x! + 2020$ arvot $2021, 2022, 2026, 2044$, joten näissä tapauksissa ei ole ratkaisua. Jos $x \geq 5$, pätee $5 \mid (2020 + x!)$. Tällöin on myös oltava $5^2 \mid (2020 + x!)$, eli $2020 + x! \equiv 0 \bmod 25$. Huomataan, että $4! \equiv -1 \bmod 25$, joten

$$5! \equiv 20 \bmod 25,\ \ 6! \equiv 20 \bmod 25,\ \ 7! \equiv 15 \bmod 25,\ \ 8! \equiv 20 \bmod 25 \text{ ja } 9! \equiv 5 \bmod 25.$$

Ainoastaan siis $5^2 \mid (9! + 2020)$. Lasketaan: $9! = 362880$, joten $9! + 2020 = 364900 = 10^2 \cdot 3649$. Koska $60^2 = 3600$ ja $61^2 > 3700$, ei luku 3649 voi olla neliö. Ratkaisuja ei siis ole.