Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

5. 10. 2020

Tehtäviä on kahdella sivulla; ensimmäiset kuusi tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeaa vastausta.

1. Tasasivuisen kolmion ja neliön piirit ovat yhtä suuret. Tällöin neliön pinta-alan suhde kolmion pinta-alaan on

a) > 1 b) > 2 c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{9}{4\sqrt{3}}$

2. Olkoon $x > 0$, $y > 0$ ja $xy > 1$. Lauseke

$$\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^{x}\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(y-\frac{1}{x}\right)^{y}}$$

sievenee muotoon

a) $(x+y)^{x-y}$ b) $\dfrac{(x-y)^x}{(x+y)^y}$ c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}$ d) $(x-y)^{x+y}$

3. Puutarhan hedelmäpuista 55% on omenapuita ja 45% päärynä- ja kirsikkapuita. Kirsikkapuita on 25% enemmän kuin päärynäpuita. Puutarhan puista on kirsikkapuita tällöin

a) 20% b) 25% c) 30% d) $< \frac{2}{5}$

4. Olkoot a ja n positiivisia kokonaislukuja. Millä seuraavista luvuista erotus $a^{n+4} - a^n$ on varmasti jaollinen?

a) 4 b) 15 c) 8 d) 9

5. Jos reaaliluku x toteuttaa ehdot $|x| < 10$ ja $x \neq 1$, silloin $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

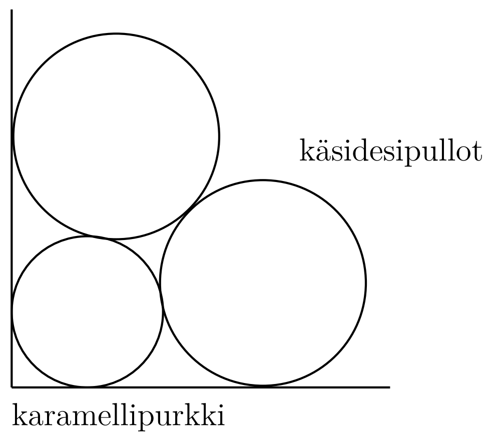
a) on aina > 3
b) voi olla > 21 sopivalla x
c) on aina < 20
d) annetut lähtötiedot eivät mahdollista mitään edellisiä päätelmiä

6. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille jokainen tuloista abc, abd, acd ja bcd on rationaaliluku. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Tulo $abcd$ on rationaalinen.
b) Summa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on rationaalinen.
c) Summa $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ on rationaalinen.
d) Jos myös summa $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ on rationaalinen, niin a on rationaalinen.

7. Opettaja keksii harjoituksen, jossa treenataan vähennyslaskuja. Opettaja kirjoittaa taululle luvut $1, 2, \ldots, 100$. Kukin oppilas tulee vuorollaan taululle, pyyhkii pois kaksi lukua ja kirjoittaa taululle niiden erotuksen. Opettaja vilkaisee taululle vasta kun viimeisenä vuorossa oleva oppilas pyyhkii pois kaksi viimeistä lukua ja kirjoittaa niiden erotuksen, joka on 7. Opettaja silmäilee luokkaa ja toteaa: ”Joku teistä laski väärin.” Mistä hän tiesi?

8. Jukka on löytänyt loistavan piilopaikan karamellipurkilleen kahden lieriönmuotoisen käsidesipullon takaa suorakulmaisessa nurkassa (ks. kuva). Kuinka suuri voi olla purkin halkaisija d korkeintaan, kun purkin halutaan olevan täysin piilossa ja käsidesipullojen halkaisijat ovat r?



Perussarjan monivalinnan vastauslomake

5. 10. 2020

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

5. 10.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

2020

Tehtäviä on kahdella sivulla; ensimmäiset kolme tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Tasasivuisen kolmion ja neliön piirit ovat yhtä suuret. Tällöin neliön pinta-alan suhde kolmion pinta-alaan on

a) > 1	b) > 2	c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	d) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

2. Jos reaaliluku x toteuttaa ehdot $|x| < 10$ ja $x \neq 1$, silloin $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

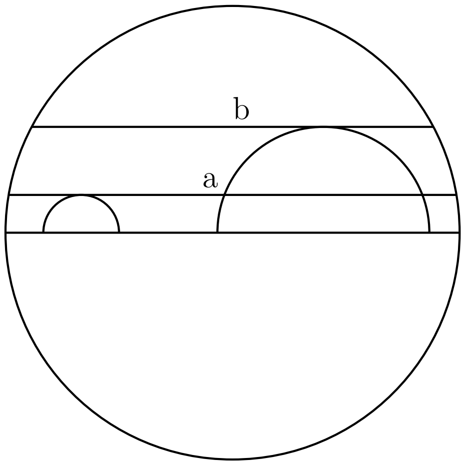
a) on aina > 3
b) voi olla > 21 sopivalla x
c) on aina < 20
d) annetut lähtötiedot eivät mahdollista mitään edellisiä päätelmiä

3. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille jokainen tuloista abc, abd, acd ja bcd on rationaaliluku. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Tulo $abcd$ on rationaalinen.
b) Summa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on rationaalinen.
c) Summa $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ on rationaalinen.
d) Jos myös summa $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ on rationaalinen, niin a on rationaalinen.

4. Määritä kaikki suorakulmaiset kolmiot, joiden sivut ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä.

5. Kuvan ympyrän halkaisijalle piirretään kaksi puoliympyrää. Määritä jänteiden pituuksien a ja b funktiona se pinta-ala, joka jää jäljelle, kun puoliympyrät leikataan kuviosta pois. Jänteet ovat yhdensuuntaisia halkaisijan kanssa. Voidaan olettaa tunnetuksi, että puoliympyrät eivät leikkaa toisiaan eivätkä ole päällekkäin.



6. Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö $x^4 - y^4 = 2020$.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

5. 10. 2020

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4, 5 ja 6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4, 5 ja 6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4, 5 ja 6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________

Koulu : ______________________

Kotiosoite : ______________________

Sähköposti : ______________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

5. 10. 2020

1. Vanhoilla herroilla Niemi, Ranta ja Saari on jokaisella yksi poika. Poikien etunimet ovat Asko, Esko ja Usko. Jokaisella on isänsä sukunimi. Lisäksi tiedetään, että

1) Vanha herra Ranta on kalju.
2) Eskon hiukset ovat hartioille asti.
3) Vanha herra Niemi ei ole koskaan ollut lentokoneessa.
4) Eskon isällä on lyhyet hiukset.
5) Yksi vanhoista herroista on kokenut lentäjä ja hänen hiuksensa ovat yhtä pitkät kuin Eskolla.
6) Uskon isä kalastaa vanhan herra Saaren kanssa sunnuntaisin.

Vastaa seuraaviin kysymyksiin huolellisesti ja loogisesti perustellen.

a) Mikä on Askon sukunimi?

b) Kuka vanhoista herroista on lentäjä?

c) Mikä on Eskon sukunimi?

2. Ympyrän kehältä on valittu neljä eri pistettä A, B, C ja D, tässä järjestyksessä, ja ne jakavat kehän kaariin AB, BC, CD ja DA, joiden keskipisteet ovat X, Y, Z ja W, tässä järjestyksessä. Osoita, että janojen XZ ja YW leikkauskulma on suora kulma.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^{12} \end{cases}$$

positiivisten reaalilukujen x ja y joukossa.

4. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joilla pätee $x! = y^2 - 2020$.

Työaikaa on **120 minuuttia**.
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

5. 10. 2020

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. En liksidig triangel och en kvadrat har lika stora omkretsar. Då är förhållandet mellan kvadratens area och triangelns area

a) > 1	b) > 2	c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	d) $\frac{9}{4\sqrt{3}}$

2. Anta att $x > 0$, $y > 0$ och $xy > 1$. Uttrycket

$$\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^{x}\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(y-\frac{1}{x}\right)^{y}}$$

kan förenklas till formen

a) $(x+y)^{x-y}$	b) $\dfrac{(x-y)^{x}}{(x+y)^{y}}$	c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}$	d) $(x-y)^{x+y}$

3. Av fruktträden i en trädgård är 55% äppelträd och 45% päron- och körsbärsträd. Det finns 25% fler körsbärsträd än päronträd. Andelen körsbärsträd av träden i trädgården är då

a) 20%	b) 25%	c) 30%	d) $< \frac{2}{5}$

4. Anta att a och n är positiva heltal. Vilka av följande tal är differensen $a^{n+4} - a^{n}$ säkert delbar med?

a) 4	b) 15	c) 8	d) 9

5. När det reella talet x uppfyller villkoren $|x| < 10$ och $x \neq 1$

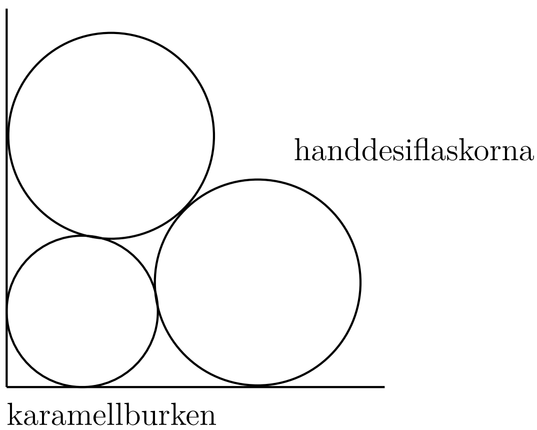
a) är $\left|\frac{2x}{2x-2}\right|$ alltid > 3
b) kan $\left|\frac{2x}{2x-2}\right|$ vara > 21 för ett lämpligt x
c) är $\left|\frac{2x}{2x-2}\right|$ alltid < 20
d) möjliggör den givna startinformationen ingen av de föregående slutsatserna

6. Anta att a, b, c och d är positiva reella tal, för vilka var och en av produkterna abc, abd, acd och bcd är ett rationellt tal. Vilka av följande påståenden stämmer säkert?

a) Produkten $abcd$ är rationell.
b) Summan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ är rationell.
c) Summan $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ är rationell.
d) Ifall även summan $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ är rationell så är a rationellt.

7. En lärare hittar på en övning i att träna subtraktioner och antecknar talen $1, 2, \ldots, 100$ på tavlan. Var och en av eleverna kommer turvis upp till tavlan, stryker bort två tal och antecknar differensen av dessa. Läraren blickar mot tavlan först när den sista eleven raderar de två sista talen och antecknar differensen av dessa som är 7. Läraren tittar ut i klassen och kommenterar: ”Någon av er räknade fel.” Hur visste han det?

8. Jukka har hittat ett ypperligt gömställe åt sin karamellburk bakom två stora cylinderformade handdesiflaskor i ett rätvinkligt hörn (se figuren). Hur stor får burkens diameter d högst vara för att flaskan skall kunna gömmas helt, då båda handdesiflaskornas diameter är r?



5. 10. — 2020

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett – om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

5. 10. 2020

Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. En liksidig triangel och en kvadrat har lika stora omkretsar. Då är förhållandet mellan kvadratens area och triangelns area

a) > 1 b) > 2 c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

2. När det reella talet x uppfyller villkoren $|x| < 10$ och $x \neq 1$

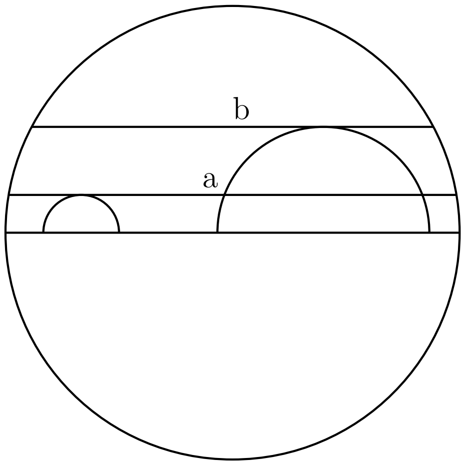
a) är $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$ alltid > 3
b) kan $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$ vara > 21 för ett lämpligt x
c) är $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$ alltid < 20
d) möjliggör den givna startinformationen ingen av de föregående slutsatserna.

3. Anta att a, b, c och d är positiva reella tal, för vilka var och en av produkterna abc, abd, acd och bcd är ett rationellt tal. Vilka av följande påståenden stämmer säkert?

a) Produkten $abcd$ är rationell.
b) Summan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ är rationell.
c) Summan $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ är rationell.
d) Ifall även summan $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ är rationell så är a rationellt.

4. Bestäm alla rätvinkliga trianglar vilkas sidlängder utgör på varandra följande termer i en aritmetisk talföljd.

5. Man ritar in två halvcirklar mot diametern i cirkeln på bilden. Halvcirklarna skärs bort ur figuren. Bestäm den area som blir kvar och ange den som en funktion av längderna på kordorna a och b. Kordorna är parallella med diametern. Vi kan anta det känt att halvcirklarna inte skär varandra eller överlappar varandra.



6. Lös ekvationen $x^4 - y^4 = 2020$ i mängden av hela tal.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

5. 10. 2020

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervals-uppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett – om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

5. 10. 2020

1. De gamla herrarna Niemi, Ranta och Saari har alla en son. Pojkarnas förnamn är Asko, Esko och Usko. Varje son har sin faders efternamn. Dessutom vet man att

1) Gamla herr Ranta är skallig.
2) Eskos hår är axellångt.
3) Gamla herr Niemi har aldrig varit i ett flygplan.
4) Eskos far har kort hår.
5) En av de gamla herrarna är en erfaren flygare och hans hår är lika långt som Eskos.
6) Uskos far brukar fiska med gamla herr Saari på söndagar

Besvara följande frågor omsorgsfullt och motivera logiskt.

a) Vad är Askos efternamn?

b) Vem av de gamla herrarna är flygare?

c) Vad är Eskos efternamn?

2. Man väljer fyra olika punkter A, B, C och D i nämnd ordning på en cirkels periferi och punkterna delar in cirkelns periferi i bågarna AB, BC, CD och DA. Bågarnas mittpunkter är X, Y, Z och W i nämnd ordning. Visa att sträckorna XZ och YW skär varandra vinkelrätt.

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^{12} \end{cases}$$

i mängden av de positiva reella talen x och y.

4. Bestäm alla sådana positiva heltal x och y för vilka det gäller att $x! = y^2 - 2020$.

Tävlingstiden **120 minuter.**
Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.

5. 10. High School Mathematics Competition 2020
First Round, Basic Level

The problems are on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. An equilateral triangle and a square have equal perimeters. Then the ratio of the area of the square to the area of the triangle is

a) > 1	b) > 2	c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	d) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

2. Let $x > 0$, $y > 0$ and $xy > 1$. The expression

$$\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^{x}\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(y-\frac{1}{x}\right)^{y}}$$

simplifies to

a) $(x+y)^{x-y}$	b) $\dfrac{(x-y)^x}{(x+y)^y}$	c) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$	d) $(x-y)^{x+y}$

3. In a garden, 55 % of the fruit trees are apple trees and 45 % are pear and cherry trees. There are 25 % more cherry trees than pear trees. Then the portion of cherry trees in the garden is

a) 20%	b) 25%	c) 30%	d) $< \dfrac{2}{5}$

4. Let a and n be positive integers. Which of the following numbers are certainly divisors of the difference $a^{n+4} - a^n$?

a) 4	b) 15	c) 8	d) 9

5. Let $x \neq 1$ be a real number. If $|x| < 10$, then $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

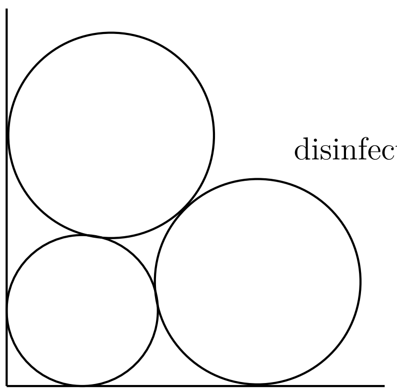
a) is always > 3
b) can be > 21 for a suitable x
c) is always < 20
d) the given data do not allow any of a), b) or c) as conclusions

6. Let a, b, c and d be positive real numbers such that each of the products abc, abd, acd and bcd is a rational number. Which of the following statements are certainly true?

a) The product $abcd$ is rational.
b) The sum $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ is rational.
c) The sum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ is rational.
d) If the sum $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ is also rational, then a is rational.

7. A teacher invents an exercise for training subtractions. The teacher writes on the chalkboard the numbers 1, 2, . . . , 100. The students go to the chalkboard one by one. Each student erases two numbers and then writes their difference on the chalkboard. The teacher looks back at the chalkboard only when the last student erases the last two numbers and writes their difference 7. The teacher eyes the class and declares: "Some of you miscalculated." How did the teacher know?

8. Jukka has found a splendid hiding place for his candy jar behind two large cylinder formed disinfectant bottles in a right-angled corner (see the figure). What is the maximal possible diameter d of the candy jar when the jar should be completely hidden behind the bottles, and both bottles have diameter r?



Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

5. 10. 2020

The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+"to the appropriate square, if the answer is right and a "–" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **The use of calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

High School Mathematics Competition
First Round, Intermediate Level

5. 10. 2020

The problems are on two pages; the first three problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.

1. An equilateral triangle and a square have equal perimeters. Then the ratio of the area of the square to the area of the triangle is

a) > 1 b) > 2 c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

2. Let $x \neq 1$ be a real number. If $|x| < 10$, then $\left|\dfrac{2x}{2x-2}\right|$

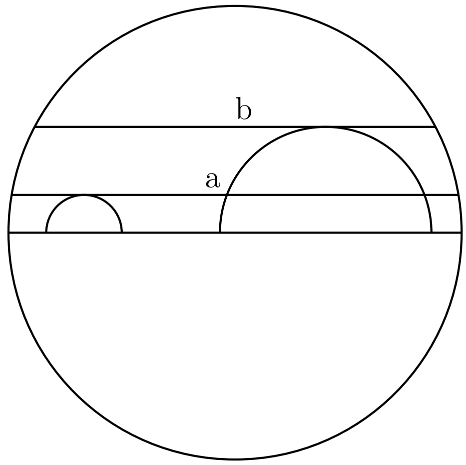
a) is always > 3
b) can be > 21 for a suitable x
c) is always < 20
d) the given data do not allow any of a), b) or c) as conclusions

3. Let a, b, c and d be positive real numbers such that each of the products abc, abd, acd and bcd is a rational number. Which of the following statements are certainly true?

a) The product $abcd$ is rational.
b) The sum $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ is rational.
c) The sum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ is rational.
d) If the sum $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ is also rational, then a is rational.

4. Determine all right-angled triangles which have the property that the side lengths are consecutive members of an arithmetic progression.

5. Two semicircles are drawn on a diameter of the circle in the picture. Determine the area left when the semicircles are cut away from the figure as the function of the lengths a and b of the chords which are parallel to the diameter. The semicircles do not intersect each other or overlap each other.



6. Solve the equation $x^4 - y^4 = 2020$ in the set of integers.

5. 10.

Intermediate Level Multiple Choice Answer Sheet

2020

The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a + to the appropriate square, if the answer is right and a – if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.

The time allowed is 120 minutes. **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

Name : ______________________________

School : ______________________________

Home address : ______________________________

Email : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

5. 10.

High School Mathematics Competition
First Round, Open Level

2020

1. The old gentlemen Niemi, Ranta and Saari have one son each. The first names of the sons are Asko, Esko and Usko. Each has his father's surname. Furthermore, we know that

1) The old gentleman Ranta is bald.
2) Esko has shoulder length hair.
3) The old gentleman Niemi has never flown in an airplane.
4) Esko's father has short hair.
5) One of the old gentlemen is an experienced airplane pilot and his hair is as long as Esko's hair.
6) Usko's father goes fishing with the old gentleman Saari every Sunday.

Please answer the following questions carefully and logically justifying your conclusions.

a) What is Asko's surname?

b) Which of the old gentlemen is a pilot?

c) What is Esko's surname?

2. Four different points A, B, C and D have been chosen from a circle in this order, and they dissect the circle into four arcs AB, BC, CD and DA, and the midpoints of the arcs are X, Y, Z and W, respectively. Prove that the angle of intersection between the segments XZ and YW is a right angle.

3. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^{12} \end{cases}$$

in the set of positive real numbers x and y.

4. Determine all positive integers x and y for which $x! = y^2 - 2020$.

Time allowed: **120 minutes**.
Only writing and drawing equipments are allowed.
No calculators or tables!
Write your solutions of different problems on different sheets.
Mark every sheet with your name and provide
contact information (school, your own address and email).