Neljän tieteen kisat
Peruskoulun matematiikkakilpailu
Alkukilpailu 22.9. – 5.10.2021
Tehtävät ja pisteytys
MAOL ry

Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukilpailu

22.9. – 5.10.2021

1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

Työskentelyaika 45 minuuttia. Ratkaise kaikki tehtävät **erilliselle paperille**. Perustele vastauksesi laskulausekkeella, piirroksella tai selityksellä. Palauta tämä tehtäväpaperi vastauspaperisi mukana. Laskinta ei saa käyttää. Sallitut välineet: lyijykynä, viivain, pyyhekumi.

1. Päättele puuttuvat symbolit. Kirjoita vastauksesi erilliselle paperille.

a.

□	★	★	□	♥
♥	○	□	□	★
★	□	♥	♥	○
□	□	★	★	□
♥	♥	○	□	□
★	★	□	♥	♥
○	□	□	?	?
□	♥	♥	?	?

b.

★	□	□	♥	★
□	○	♥	□	□
○	□	★	□	□
♥	★	□	○	♥
□	□	○	□	★
□	□	♥	★	□
○	♥	□	?	?
□	★	□	?	?

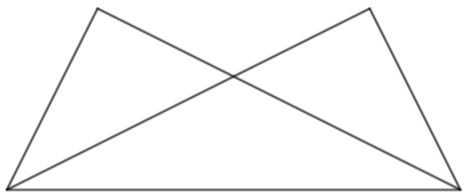
2. Taneli rakentaa pieniä hyllykköjä koulun myyjäisiin myytäväksi. Yksi hyllykkö koostuu kolmesta vaakatasossa olevasta laudasta (hyllyt) sekä kahdesta pystyssä olevasta laudasta (kiinnikkeet), joihin hyllyt on kiinnitetty. Hyllyn leveys on 30 cm ja pystypuun korkeus 50 cm. Jokainen hylly on kiinnitetty molemmista päästään 2 naulalla pystypuihin. Muita kiinnityksiä ei ole.

   Tanelilla on käytössään 10 kpl 2 m pitkiä lautoja sekä 95 naulaa. Taneli rakentelee hyllyköitä, kunnes vähintään toinen raaka-aineista loppuu (eli sitä ei enää riitä kokonaiseen hyllykköön). Kuinka monta hyllykköä hän rakentaa?

3. Olkoot x ja y sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että
$$xy = 2021.$$
Mitä arvoja voi saada lauseke
$$(x - 1)(y + 1)?$$
Perustele.

4. Taneli päättää järjestää turvavälillisen konsertin koulun liikuntasalissa. Jokaisen kahden katsojan nenänpään etäisyys toisistaan on vähintään 2 metriä. Katsomoksi hän rajaa tilan, jonka koko on 9,5 m x 9,5 m.
    a. Ensin Taneli keksii, että hän voi asettaa katsomoon 25 ihmistä. Miten tämä onnistuu?
    b. Tarkemmin mietittyään hän keksii, miten katsomoon saadaan 30 katsojaa. Miten tämä on mahdollista?

5. Oheinen kuvio koostuu kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta, joiden kateetit ovat 6 ja 8 ja hypotenuusat päällekkäin. Määritä suorakulmaisten kolmioiden yhteisen alan pinta-ala.



6. Ravikilpailuun osallistuu 36 hevosta useassa eri lähdössä. Jokaisessa lähdössä on enintään 6 hevosta.

   Oletetaan, ettei käytössä ole yhtään aikaa mittaavaa laitetta tai välinettä. Oletetaan lisäksi, että jokainen hevonen suoriutuu jokaisesta lähdöstään yhtä hyvin.

   Kuinka monta lähtöä tarvitaan, jotta voidaan selvittää, mitkä 3 hevosta ovat näistä hevosista nopeimmat?

7. Käytetään merkintää $\lfloor x \rfloor$ siitä luvusta, joka saadaan, kun luku x pyöristetään alaspäin kokonaisluvuksi. Esimerkiksi:
$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 3{,}5 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 6{,}8 \rfloor = 6.$$
   Laske tämän määritelmän pohjalta
$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt{49} \rfloor + \lfloor \sqrt{50} \rfloor.$$

8. Laskemista lausekkeilla.
    a. Olkoon x mikä tahansa luku. Laske $x^2 + (x+3)^2 - (x+2)^2 - (x+1)^2$.
    b. Laske:
$$(1^2 + 5^2 + 9^2 + \cdots + 97^2) + (4^2 + 8^2 + 12^2 + \cdots + 100^2) \\ - (2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + 98^2) - (3^2 + 7^2 + 11^2 + \ldots 99^2)$$

Grundskolans matematiktävling: inledande tävling
22.9. – 5.10.2021

1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

Provtiden är 45 minuter. Lös alla uppgifter på **separat papper**. Motivera dina svar med räkneuttryck, figurer eller förklaringar. Returnera detta uppgiftspapper tillsammans med ditt svarspapper. Räknare får inte användas. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi.

1. Klura ut de symboler som fattas. Skriv ditt svar på separat papper.

a.

□	★	★	□	♥
♥	○	□	□	★
★	□	♥	♥	○
□	□	★	★	□
♥	♥	○	□	□
★	★	□	♥	♥
○	□	□	?	?
□	♥	♥	?	?

b.

★	□	□	♥	★
□	○	♥	□	□
○	□	★	□	□
♥	★	□	○	♥
□	□	○	□	★
□	□	♥	★	□
○	♥	□	?	?
□	★	□	?	?

2. Taneli bygger små hyllor för försäljning på skolans vårmarknad. En hylla består av tre vågräta brädor (hyllplan) och två lodräta brädor i vilka hyllplanen är fästa. Hyllans bredd är 30 cm och höjden av de lodräta brädorna är 50 cm. Varje hyllplan är fäst i de lodräta brädorna med 2 spikar i båda ändorna. Det finns inga andra spikar.

   Taneli har 10 stycken 2 m långa brädor och 95 spikar. Han bygger hyllorna tills åtminstone den ena råvaran tar slut (den skulle inte räcka till för att bygga en hel hylla). Hur många hyllor kan han bygga?

3. Låt x och y vara sådana positiva heltal så att

$$xy = 2021.$$

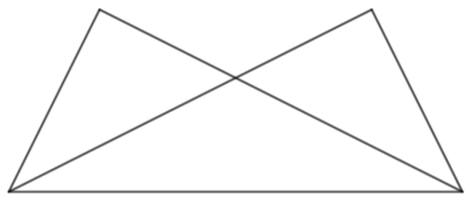
Vilka värden kan uttrycket

$$(x - 1)(y + 1)?$$

få? Motivera dit svar.

4. Taneli ska ordna en konsert och tar i beaktande åhörarnas säkerhetsavstånd till varandra. Avståndet från en åhörares nåstipp till en annans måste vara minst 2 meter. Han avgränsar ett område som är 9,5 m x 9,5 m som läktare för åhörarna.
   a. Först klurar Taneli ut att han kan få plats för 25 personer. Hur kan detta göras?
   b. Efter att Taneli funderat lite till kommer han på hur han ka få plats för 30 personer. Hur är detta möjligt?

5. Figuren här under består av två rätvinkliga trianglar vars kateter är 6 och 8 och vars hypotenusor överlappar varandra. Bestäm arean för det område som är gemensamt för de räta trianglarna.



6. I en travtävling deltar 36 hästar i olika lopp. I varje lopp deltar som mest 6 hästar.

   Låt oss anta att det inte finns något tidtagarur eller annat redskap för att mäta tiden. Vi antar också att varje häst presterar lika bra i varje lopp.

   Hur många lopp behövs för att klargöra vilka hästar som är de tre snabbaste?

7. Vi använder beteckningen $\lfloor x \rfloor$ för det heltalsom fås då talet x avrundas nedåt. Till exempel:

$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 3{,}5 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 6{,}8 \rfloor = 6.$$

   Beräkna utifrån denna definition

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt{49} \rfloor + \lfloor \sqrt{50} \rfloor.$$

8. Räkningar med uttryck.
   a. Låt x vara vilket tal som helst. Förenkla $x^2 + (x+3)^2 - (x+2)^2 - (x+1)^2$.
   b. Räkna:

$$(1^2 + 5^2 + 9^2 + \cdots + 97^2) + (4^2 + 8^2 + 12^2 + \cdots + 100^2)$$
$$- (2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + 98^2) - (3^2 + 7^2 + 11^2 + \ldots 99^2)$$

Comprehensive school mathematics competition
22nd of Sep – 5th of Oct 2021

1		/ 4 p
2		/ 4 p
3		/ 4 p
4		/ 4 p
5		/ 4 p
6		/ 4 p
7		/ 4 p
8		/ 4 p
Σ		/ 32 p

The time allotted is 45 minutes. Write your solutions on a **separate paper**. Remember to show your work: with figures, in equations, or in words. Hand this paper in. Using a calculator is not allowed. You may use a pencil, ruler, and an eraser.

1. Figure out the missing symbols. Input your answer on the separate sheet of paper.

c.

□	★	★	□	♥
♥	○	□	□	★
★	□	♥	♥	○
□	□	★	★	□
♥	♥	○	□	□
★	★	□	♥	♥
○	□	□	?	?
□	♥	♥	?	?

d.

★	□	□	♥	★
□	○	♥	□	□
○	□	★	□	□
♥	★	□	○	♥
□	□	○	□	★
□	□	♥	★	□
○	♥	□	?	?
□	★	□	?	?

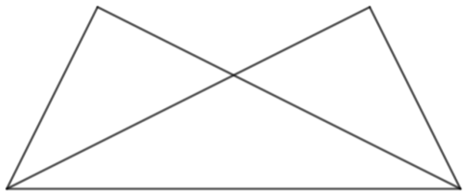
2. Taneli is building small shelves to be sold in a school fair. A shelf consists of three horizontal pieces of wood (the shelf) and two vertical pieces of wood used for attaching the shelf (the support structure). The width of the shelf is 30 cm and the height of the supporting pieces of wood is 50 cm. Each shelf is connected to the vertical pieces of wood with 2 nails from both of its ends.

   Taneli has 10 two-metre pieces of wood and 95 nails total. Taneli keeps building shelves until he runs out of at least one of the raw materials (so that it would not be possible to build a shelf from the remaining materials). How many shelves does he get with the nails and wood he has?

3. Let x and y be positive integers so that
$$xy = 2021.$$
What values can the expression
$$(x - 1)(y + 1)$$
take? Please show your work.

4. Taneli decides to organize a concert with safety distances in a large school hall. The distance between any two participants has to be at least 2 metres. The stand for the audience is 9,5 m x 9,5 m.
   a. First Taneli realizes that he can fit 25 people on the stand. How can this be done?
   b. Upon further thinking, he realizes how he can fit 30 people on the stand. How is this possible?

5. The image below consists of two right triangles whose catheti (or legs) are 6 and 8 units long, and whose hypotenuses overlap completely. Find the area of the overlap of the two right triangles.



6. In a horse race, 36 horses race in many races, 6 horses at a time.

   Let us assume that no one has any devices or equipment to measure time with. Let us also assume that each horse performs equally well in each of the several races.

   How many races of 6 horses are needed to figure out which three of the 36 horses are the fastest?

7. Let us use the notation $\lfloor x \rfloor$ for the number that is x rounded down. For example:
$$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 3{,}5 \rfloor = 3 \text{ ja } \lfloor 6{,}8 \rfloor = 6.$$
   based on this definition, find the sum
$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt{49} \rfloor + \lfloor \sqrt{50} \rfloor.$$

8. Calculations on expressions.
   a. Let x be any number. Find $x^2 + (x+3)^2 - (x+2)^2 - (x+1)^2$.
   b. Find:
$$(1^2 + 5^2 + 9^2 + \cdots + 97^2) + (4^2 + 8^2 + 12^2 + \cdots + 100^2) \\ - (2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + 98^2) - (3^2 + 7^2 + 11^2 + \ldots 99^2)$$

Pisteytysohje ja malliratkaisuja

Tehtävä 1 ja pisteytys (kuviopäättely)

a. Oikeasta kuviosta (2p), muussa tapauksessa (0p).

★	★
○	□

b. Oikeasta kuviosta (2p), muussa tapauksessa (0p).

□	○
□	♥

Tehtävä 2 (Taneli rakentaa)

Koska lautatavaraa on yhteensä $10 \cdot 2$ m=20 m ja yksi hyllykkö vie $2 \cdot 50$ cm + $3 \cdot 30$ cm = 1,9 m sekä $10 < 20 / 1{,}9 < 11$, voi Taneli rakentaa korkeintaan 10 hyllykköä ennen kuin laudat loppuvat. 10 hyllykköön laudat riittävät, sillä yhdestä 2 m pituisesta saadaan yhden hyllykön tarvittava lautatavara. Nauloja yksittäiseen hyllykköön tarvitaan $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ kappaletta. Koska $95 / 12 = 7\ 11/12$, riittävät naulat vain seitsemään hyllykköön. Taneli voi siis rakentaa korkeintaan seitsemän hyllykköä.

Pisteytys:

2p Laskettu välivaiheineen, kuinka monta hyllyä laudoista voi rakentaa.
2p Laskettu välivaiheineen, kuinka monta hyllyä nauloista voi rakentaa.
0p Pelkkä vastaus.

Tehtävä 3 ja pisteytys (kokonaislukujen tulo)

Ehto $xy = 2021$ tarkoittaa jompaa kumpaa seuraavista: sitä, että toinen luvuista x ja y on 43 ja toinen taas 47, tai sitä, että toinen luvuista x ja y on 1 ja toinen taas 2021.

Tapaus 1a: $x = 43$, $y = 47$
$(43 - 1)(47 + 1) = 42 \cdot 48 = 2016$ (perustelusta 0,5p, vastauksesta 0,5p)

Tapaus 1b: $x = 47$, $y = 43$
$(47 - 1)(43 + 1) = 46 \cdot 44 = 2024$ (perustelusta 0,5p, vastauksesta 0,5p)

Tapaus 2a: $x =1$, $y = 2021$
$(1 - 1)(2021 + 1) = 0 \cdot 2022 = 0$ (perustelusta 0,5p, vastauksesta 0,5p)

Tapaus 2b: $x = 2021$, $y = 1$
$(2021 - 1)(1 + 1) = 2020 \cdot 2 = 4040$ (perustelusta 0,5p, vastauksesta 0,5p)

Tehtävä 4 ja pisteytys (Taneli järjestää tilaisuuden)

a. Taneli asettaa joka riviin 5 katsojaa. Näiden välillä on aina 2 metriä. Tällaisia rivejä tulee 5 kpl. (2p)

b. Taneli asettaa joka riviin 5 katsojaa. Rivejä saadaan saliin 6kpl, kun joka toinen rivi siirretään niin, että katsojat ovat ikään kuin edellisen rivin katsojien puolivälissä. (1p) Tällöin kahden rivin välinen etäisyys on vain $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Kuuden rivin vaatima mitta on siis $5 \cdot \sqrt{3} < 8{,}7\text{ m} < 9{,}5\text{ m}$. (1p)

   Huomio! Moni muukin konfiguraatio voi toimia. Niitä ei siis pidä arvioida vain sillä perusteella vastaavatko ne yllä olevia, vaan ainoastaan matemaattisen pätevyyden perusteella.

Tehtävä 5 (suorakulmaiset kolmiot)

Hypotenuusan pituus on 10. Yhteinen alue on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 10. Jaetaan se korkeusjanalla kahtia. Merkitään korkeusjanan pituutta kirjaimella h. Nyt yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan

$$\frac{h}{5} = \frac{6}{8}, \text{ eli } h = \frac{30}{8}.$$

Yhteisen alueen ala on siis

$$\frac{30}{8} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 18{,}75.$$

Pisteytys:

2p Ratkaistu h perusteluineen.
2p Ratkaistu pinta-ala muuttujan h arvon avulla.
4p Ratkaistu pinta-ala muuten perustellen.
0p Pelkkä vastaus.

Tehtävä 6 (hevoskilpailu)

Jaetaan hevoset 6 eri lähtöön missä tahansa järjestyksessä, jotta kaikki hevoset ovat kilpailleet kerran. (6 lähtöä)

Valitaan näistä lähdöistä nopeimmat hevoset uuteen lähtöön, jonka tuloksesta selviää, mikä hevosista on kaikista nopein. (7. lähtö)

Nimetään ensimmäisistä 6 lähdöstä 1. lähdöksi se, jonka voittaja voitti 7. lähdön, 2. lähdöksi se, jonka voittaja sijoittui toiseksi 7. lähdössä, ja niin edelleen.

Selvittämättä on, mikä hevosista on toiseksi nopein ja mikä kolmanneksi nopein. Lähtöjen 4, 5 ja 6 kaikki hevoset voidaan jättää huomiotta, sillä näiden nopein hevonen ei ollut riittävän nopea 7. lähdössä. Samoin lähdöistä 1, 2 ja 3 voidaan jättää huomiotta sijoille 4, 5 ja 6 sijoittuneet hevoset. Lisäksi lähdön 3 sijat 2 ja 3 sekä lähdön 2 sija 3 voidaan jättää huomiotta.

Järjestetään lähtö, jossa kilpailevat 1. lähdön sijat 2 ja 3, 2. lähdön sijat 1 ja 2 sekä 3. lähdön sija 3. Tämän lähdön voittaja on toiseksi nopein hevonen ja toiseksi sijoittunut kolmanneksi nopein hevonen.

Lähtöjä tarvitaan yhteensä 8.

Pisteytys:

1p ensimmäisten 6 lähdön ideasta
1p ideasta, jossa ensimmäisten 6 lähdön voittajat kilpailevat keskenään
1p ideasta, jossa jätetään osa edellisissä lähdöissä sijoittuneista hevosista huomiotta ja otetaan uusi lähtö
Jos on ratkaistu lähtöjen määräksi 9, niin annetaan yhteensä 2p.

Tehtävä 7 (lattiafunktio)

Lukujen 1 ja 50 välille osuvat kokonaislukujen neliöt ovat:

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$ ja
$7^2 = 49$.

Summattavat luvut voidaan siis ryhmitellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \\
&\quad \lfloor\sqrt{4}\rfloor + \lfloor\sqrt{5}\rfloor + \lfloor\sqrt{6}\rfloor + \lfloor\sqrt{7}\rfloor + \lfloor\sqrt{8}\rfloor + \ldots + \\
&\quad \lfloor\sqrt{49}\rfloor + \lfloor\sqrt{50}\rfloor \\
&= (4-1)\cdot 1 + \\
&\quad (9-4)\cdot 2 + \\
&\quad (16-9)\cdot 3 + \\
&\quad (25-16)\cdot 4 + \\
&\quad (36-25)\cdot 5 + \\
&\quad (49-36)\cdot 6 + \\
&\quad 2\cdot 7 \\
&= 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + 9\cdot 4 + 11\cdot 5 + 13\cdot 6 + 2\cdot 7 \\
&= 217
\end{aligned}$$

Pisteytys:

1p Idea lukujen ryhmittelystä.
1p Laskettu kolmeksi eri kokonaisluvuksi pyöristyvät arvot, kuten $\lfloor\sqrt{1}\rfloor = 1$, $\lfloor\sqrt{6}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{50}\rfloor = 7$.
1p Saatu vastaus oikein laskettuna.

Tehtävä 8 (lausekkeet)

a. $x^2 + (x+3)^2 - (x+2)^2 - (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 6x + 9 - x^2 - 4x - 4 - x^2 - 2x - 1 = 4.$

Pisteytys:

1p Käytetty binomin neliön kaavaa tai muuten kerrottu binomi binomilla oikein.
1p Sievennetty lausekkeen arvoksi 4.

b. Tässä voi suoraan hyödyntää a.-kohdan tulosta tai lähteä testailemaan:

$$1^2 + 4^2 - 2^2 - 3^2 = 1 + 16 - 4 - 9 = 4$$
$$5^2 + 8^2 - 6^2 - 7^2 = 25 + 64 - 36 - 49 = 4$$
$$9^2 + 12^2 - 10^2 - 11^2 = 81 + 144 - 100 - 121 = 4$$

Lausekkeesta voidaan muodostaa 25 a.-kohdan mukaista lukunelikkoa.

Kysytty tulos on siis $4 \cdot 25 = 100$.

Pisteytys:

1p Laskettu yhdestä lukunelikosta arvoksi 4.
1p Perusteltu, miksi koko lausekkeen arvo on 100.