Perussarjan alkukilpailun 2021 ratkaisut

Tehtävä 1. Maa-alue on lohkottu tonteiksi. 10% tonteista on rantatontteja, joiden hinta neliömetriä kohti on 6-kertainen verrattuna tontteihin, joissa ei ole rantaa. Kuinka monta prosenttia koko alueen hinnasta on rantatonttien osuus?

a) Vähintään 30%

b) 40%

c) 25%

d) korkeintaan 30%?

Ratkaisu. Oikea vastaus on vaihtoehto b). Olkoon maa-alue a neliömetriä ja rannattomien tonttien hinta b euroa neliömetriltä. Tällöin rantatonttien hinta yhteensä on $0{,}1a \cdot 6 \cdot b = 0{,}6ab$. Muiden tonttien hinta taas on $0{,}9ab$. Rantatonttien osuus hinnasta on siis

$$\frac{0{,}6ab}{0{,}6ab + 0{,}9ab} = 40\%.$$

Tehtävä 2. Määritä suorakulmaisen kolmion terävien kulmien puolittajien muodostaman terävän kulman suuruus

a) $30°$

b) $45°$

c) $60°$

d) ei voi määrittää annetuilla tiedoilla

Ratkaisu. Oikea vastaus on vaihtoehto b). Olkoon suorakulmaiset kolmion terävät kulmat α ja β. Näiden kulmien puolittajat ja kolmion hypotenuus muodostavat kolmion, jonka kulmat ovat $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ sekä kysytyn kulman vieruskulma. Koska

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 45°,$$

on vieruskulman koko $180° - 45°$ ja kysytyn kulman koko täten $45°$.

Tehtävä 3. Käytettävissäsi on numerot $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Kutakin numeroa saa käyttää kerran. Tehtäväsi on muodostaa kaksi kolminumeroista lukua, joiden summa on 390. Kuinka monella tavalla tämä onnistuu? Summattavien järjestyksellä ei ole väliä.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 8

Ratkaisu. Oikea vastaus on vaihtoehto c). Lukujen on oltava kolminumeroisia. Toisen luvun ensimmäinen numero on 1 ja toisen 2. Lopuista numeroista $3, 4, 5, 6$ on siis muodostettava kaksi kaksinumeroista lukua, joiden summa on 90. Koska ykkösten summan on oltava kymmenellä jaollinen, on ykkösinä 4 ja 6. Kymmenien paikalle tulee siis 3 ja 5.

Koska summattavien järjestyksellä ei ole väliä, saadaan vastaukseksi $2 \cdot 2 = 4$.

Tehtävä 4. Huoneen lattia on $6\text{m} \times 8\text{m}$ ja korkeus 3m. Lattian nurkasta vedetään seiniä ja kattoa pitkin mahdollisimman lyhyt sähköjohto keskelle kattoa. Sen pituus on

a) 10m.

b) 8m.

c) < 8m.

d) 9,5m

Ratkaisu. Oikea vaihtoehto on vaihtoehto c). Huomataan, että alle 8 metrin pituus saavutetaan niin, että vedetään johto nurkasta 6 metrin levyisen seinän kautta kattoon. Tällöin johto muodostaa suorakulmaisen kolmion hypotenuusan. Tämän kolmion kateetit ovat 3 metriä ja 7 metriä, jolloin hypotenuusan pituus on $\sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} < 8$ metriä.

Tehtävä 5. Kolmekymmentä keskenään samanlaista palloa asetetaan kolmeen laatikkoon. 15 palloa on valkoisia ja 15 mustia. Valitaan umpimähkään jokin laatikoista ja nostetaan sieltä umpimähkään yksi pallo.

a) Suurin todennäköisyys nostaa valkoinen pallo on, kun jokaiseen laatikkoon on asetettu viisi valkoista ja viisi mustaa palloa

b) Millään muulla kuin a-kohdan asettelulla ei saada yhtä suurta todennäköisyyttä nostaa valkoista palloa.

c) Koska laatikoita on useita, tähän päivään mennessä edes supertietokoneiden avulla ei ole löydetty sellaista pallojen asettelua, joka antaisi suuremman todennäköisyyden saada valkoinen pallo kuin a-kohdan asettelu.

d) On olemassa a-kohtaa paremman todennäköisyyden tuottava asettelu saada valkoinen pallo.

Ratkaisu. Oikea vaihtoehtoehto on vaihtoehto d). Voidaan nimittäin asettaa esimerkiksi kahteen laatikkoon kumpaankin vain yksi valkoinen pallo ja kolmanteen laatikkoon kaikki loput pallot. Tällöin todennäköisyys saada valkoinen pallo on yli $\frac{2}{3}$, kun a)-kohdan asettelulla se on $\frac{1}{2}$.

Tehtävä 6. Luvut a ja b ovat epänegatiivisia kokonaislukuja. Mitkä ovat luvun $a^4 + b^6 + (a+b)^8$ mahdolliset jakojäännökset neljällä jaettaessa?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Ratkaisu. Oikeat vaihtoehdot ovat vaihtoehdot a) ja c). Kun $a = b = 0$, on lauseke 0, jolloin jakojäännös on niin ikään 0. Kun $a = 1$ ja $b = 0$, on lauseke 2, jolloin jakojäännös on niin ikään 2. Osoittautuu, että muita mahdollisuuksia ei ole. Nimittäin, summa on aina parillinen: Jos a ja b ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, niin $a^4 + b^6$ on parillinen ja $a+b$ on parillinen myös. Jos taas luvuista a ja b toinen on parillinen ja toinen pariton, niin silloin $a+b$ on pariton, jolloin summassa on täsmälleen yksi parillinen ja kaksi paritonta termiä.

Tehtävä 7. Määritellään luvut $x_1, x_2, \ldots$ seuraavasti: $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, missä $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ sekä $x_n = 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$. Laske $x_{2021} + x_{2022}$.

Ratkaisu. Lasketaan ensin muutamia arvoja:

$$x_2 = 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = 1 - \frac{a}{a-1} = -\frac{1}{a-1}$$

ja

$$x_3 = 1 - \frac{1}{x_2} = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{a-1}} = 1 + (a-1) = a.$$

Nyt $x_4 = 1 - \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{1}{a} = x_1$, joten luvut muodostavat syklin, jonka pituus on kolme. Koska $2021 = 673 \cdot 3 + 2$ ja $2022 = 3 \cdot 674$, saadaan

$$x_{2021} + x_{2022} = x_2 + x_3 = -\frac{1}{a-1} + a = \frac{1}{1-a} + a.$$

Tehtävä 8. Kuinka monta sellaista suorakulmaista kolmiota on olemassa, jonka sivut ovat kokonaislukuja sekä hypotenuusa pariton ja korkeintaan 100?

Voit hyödyntää seuraavaa tietoa: Jos a ja b ovat suorakulmaisen kolmion kateetit (a pariton) ja c sen hypotenuusa ja jos ei ole olemassa ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka jakaisi luvut a, b ja c, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, joilla ei ole ykköstä suurempaa yhteistä jakajaa, ja joiden avulla voidaan kirjoittaa $a = n^2 - m^2$, $b = 2nm$ ja $c = n^2 + m^2$.

Ratkaisu. Määritetään aluksi primitiivisten kolmikkojen lukumäärä, eli sellaisten kolmikkojen lukumäärä, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Hypotenuusa on esitettävissä muodossa $n^2 + m^2$, missä $m > 0$ on pariton ja $n > 0$ parillinen. Koska $n^2 + m^2 \leq 100$, pätee $m \leq 9$.

Käydään läpi tapaus tapaukselta: $m = 9$, joten $n^2 \leq 19$, eli $n = 2$ tai $n = 4$. Jos $m = 7$, niin vastaavasti $n = 2, 4, 6$. Jos $m = 5$, niin $n = 2, 4, 6, 8$. Jos $m = 3$, niin $n = 2, 4, 8$. Huomaa, että $n = 6$ ei käy, sillä lukujen 3 ja 6 syt on 3. Jos $m = 1$, niin $n = 2, 4, 6, 8$.

Näin saatiin $2 + 3 + 4 + 3 + 4 = 16$ vaihtoehtoa.

Tarkastellaan nyt muut kuin primitiiviset. Nämä saadaan primitiivisistä kertomalla. Koska hypotenuusa on pariton, on kertoimen oltava joukossa $3, 5, 7, \ldots$. Kerrottava hypotenuusa voi siis olla korkeintaan $\frac{100}{3} \approx 33$. Koska $6^2 = 36 > 33$, on kerrottavan hypotenuusan oltava muotoa $n^2 + m^2$, missä $m \leq 5$ on pariton ja $n = 2$ tai $n = 4$.

Käydään tapaukset läpi: $n = 2$, jolloin jos $m = 1$, on alkuperäinen hypotenuusa 5, jolloin se voidaan kertoa millä tahansa luvuista $3, 5, 7, \ldots 19$.

Jos taas $m = 3$, niin alkuperäinen on $2^2 + 3^2 = 13$, jolloin mahdolliset kertoimet ovat $3, 5, 7$.

Jos taas $m = 5$, niin alkuperäinen on $2^2 + 5^2$, jolloin ainoa mahdollinen kerroin on 3.

Jos taas $n = 4$, saadaan seuraavat tapaukset: Jos $m = 1$, on alkuperäinen $4^2 + 1^1 = 17$, jolloin mahdolliset kertoimet ovat $3, 5$.

Jos $m = 3$, on alkuperäinen hypotenuusa $4^2 + 3^2 = 25$, jolloin kerroin on 3.

Jos $m = 5$, on alkuperäinen hypotenuusa $4^2 + 5^2 = 41$, mikä ei ole mahdollista.

Saatiin siis yhteensä $9 + 3 + 1 + 2 + 1 = 16$ tapausta lisää. Yhteensä vaihtoehtoja on 32.

Välisarjan alkukilpailun 2021 ratkaisut

Tehtävä 1. Käytettävissäsi on numerot $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Kutakin numeroa saa käyttää kerran. Tehtäväsi on muodostaa kaksi kolminumeroista lukua, joiden summa on 390. Kuinka monella tavalla tämä onnistuu? Summattavien järjestyksellä ei ole väliä.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 8

Ratkaisu. Oikea vastaus on vaihtoehto c). Lukujen on oltava kolminumeroisia. Toisen luvun ensimmäinen numero on 1 ja toisen 2. Lopuista numeroista $3, 4, 5, 6$ on siis muodostettava kaksi kaksinumeroista lukua, joiden summa on 90. Koska ykkösten summan on oltava kymmenellä jaollinen, on ykkösinä 4 ja 6. Kymmenien paikalle tulee siis 3 ja 5.

Koska summattavien järjestyksellä ei ole väliä, saadaan vastaukseksi $2 \cdot 2 = 4$.

Tehtävä 2. Maa-alue on lohkottu tonteiksi. 10% tonteista on rantatontteja, joiden hinta neliömetriä kohti on 6-kertainen verrattuna tontteihin, joissa ei ole rantaa. Kuinka monta prosenttia koko alueen hinnasta on rantatonttien osuus?

a) Vähintään 30%

b) 40%

c) 25%

d) korkeintaan 30%?

Ratkaisu. Oikea vastaus on vaihtoehto b). Olkoon maa-alue a neliömetriä ja rannattomien tonttien hinta b euroa neliömetriltä. Tällöin rantatonttien hinta yhteensä on $0{,}1a \cdot 6 \cdot b = 0{,}6ab$. Muiden tonttien hinta taas on $0{,}9ab$. Rantatonttien osuus hinnasta on siis

$$\frac{0{,}6ab}{0{,}6ab + 0{,}9ab} = 40\%.$$

Tehtävä 3. Kolmiossa $\triangle ABC$ on $BC = 10$, ja lisäksi kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Näin syntyvien kolmioiden $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$ alat ovat kumpikin suuruuksiltaan 30. Mitkä seuraavista väitteistä ovat välttämättä tosia?

a) $AD \perp BC$.

b) $AD = 12$.

c) $AB = AC$.

d) Kolmion $\triangle ABC$ piiri on 34.

Ratkaisu. Väitteet a), b) ja c) ovat tosia. Kolmioilla $\triangle ABD$ ja $\triangle ACD$ on sama korkeus ja sama ala, joten niiden kantojen BD ja DC on myös oltava yhtä suuret. Kulmanpuolittajalauseen nojalla $AB = AC$, joten kyseessä on tasakylkinen kolmio, ja AD on kantaa BC vasten piirretty korkeusjana. Kolmion ala on toisaalta $30 + 30 = 60$, ja toisaalta $BC \cdot AD/2 = 5 \cdot AD$, joten $AD = 12$. Pythagoraan lauseella $AB = AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Kolmion $\triangle ABC$ piiri on siis $10 + 13 + 13 = 36$.

Tehtävä 4. Piirretään ympyrä ja kaksi säännöllistä kuusikulmiota. Pienemmän kuusikulmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Suuremman kuusikulmion sivut taas sivuavat ympyrää. Määritä suuremman kuusikulmion pinta-alan suhde pienemmän kuusikulmion pinta-alaan.

Ratkaisu. Olkoon ympyrän säde r. Tällöin pienempi kuusikulmio muodostuu tasasivuisista kolmioista, joiden sivujen pituudet ovat r. Sen ala on siis

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

Suurempi kuusikulmio taas muodostuu tasasivuisista kolmioista, joiden korkeus on r. Tällöin niiden sivujen pituudet ovat $\frac{2}{\sqrt{3}}r$. Kuusikulmion ala on siis

$$6 \cdot \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}r \cdot r = 2\sqrt{3}r^2.$$

Suuremman kuusikulmion pinta-alan suhde pienemmän kuusikulmion alaan on siis

$$\frac{2\sqrt{3}r^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2} = \frac{4}{3}.$$

Tehtävä 5. Määritellään luvut $x_1, x_2, \ldots$ seuraavasti: $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$, missä $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ sekä $x_n = 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$. Määritä luvun a arvo, kun $x_{2021} + x_{2022}$=1.

Ratkaisu. Lasketaan ensin muutamia arvoja:

$$x_2 = 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = 1 - \frac{a}{a-1} = -\frac{1}{a-1}$$

ja

$$x_3 = 1 - \frac{1}{x_2} = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{a-1}} = 1 + (a-1) = a.$$

Nyt $x_4 = 1 - \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{1}{a} = x_1$, joten luvut muodostavat syklin, jonka pituus on kolme. Koska $2021 = 673 \cdot 3 + 2$ ja $2022 = 3 \cdot 674$, saadaan

$$x_{2021} + x_{2022} = x_2 + x_3 = -\frac{1}{a-1} + a = \frac{1}{1-a} + a.$$

Nyt ratkaistaan yhtälö

$$\frac{1}{1-a} + a = 1.$$

Tämä on yhtäpitävä yhtälön $a(1-a) = -a$ kanssa. Koska $a \neq 0$, voidaan sieventää, jolloin saadaan $1 - a = -1$, eli $a = 2$.

Tehtävä 6. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, joilla on se ominaisuus, että

$$f\big(x\,f(y)\big) + f(x)\,f(y) = xy$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Sijoittamalla $x = 1$ saamme yhtälön

$$f\big(f(y)\big) + f(1)\,f(y) = y$$

jokaiselle $y \in \mathbb{R}_+$. Jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $x \neq y$, niin

$$f\big(f(x)\big) + f(1)\,f(x) = x \neq y = f\big(f(y)\big) + f(1)\,f(y),$$

jolloin on oltava $f(x) \neq f(y)$. Seuraavaksi, sijoittamalla alkuperäiseen funktionaaliyhtälöön $y = 1$ saamme yhtälön

$$f\big(f(1)\,x\big) + f(1)\,f(x) = x$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}_+$. Yhdistämällä tämä yhtälöön

$$f\big(f(x)\big) + f(1)\,f(x) = x$$

saamme pienellä sieventämisellä

$$f\big(f(1)\,x\big) = f\big(f(x)\big),$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}_+$. Nyt f saa yhtä suuret arvot pisteissä $f(1)\,x$ ja $f(x)$, joten on oltava

$$f(x) = f(1)\,x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$. Jokaiselle ratkaisulle f on siis olemassa vakio $\alpha \in \mathbb{R}_+$ niin, että $f(x) = \alpha x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$. Sijoittamalla tämä lauseke funktionaaliyhtälöön toteamme, että tietyllä vakion α arvolla funktio on ratkaisu jos ja vain jos

$$\alpha \cdot x\alpha y + \alpha x \cdot \alpha y = xy$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_+$. Mutta koska x ja y supistuvat tästä mukavasti pois, on kyseinen vakio α kelvollinen täsmälleen silloin kun $2\,\alpha^2 = 1$, eli täsmälleen silloin, kun $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Täten halutunlaisia funktioita on täsmälleen yksi, nimittäin se, jolle

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

Avoimen sarjan alkukilpailun 2021 ratkaisut

Tehtävä 1. Käytettävissäsi on numerot $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ja 8. Kutakin numeroa saa käyttää kerran. Tehtäväsi on muodostaa kaksi nelinumeroista lukua, joiden summa on 4221. Kuinka monella tavalla tämä onnistuu? Summattavien järjestyksellä ei ole väliä.

Ratkaisu. Jotta lukujen summa on 4221, on summattavien lukujen ensimmäiset numerot oltava 1 ja 2. Jos kumpikaan niistä ei olisi 1, olisi summa yli 5000. Jos taas toinen summattava olisi 1 ja toinen 3, olisi summa yli 4600, sillä satojen paikalla tulisi tällöin olla vähintään 2 ja 4, Ensimmäiset numerot ovat siis 1 ja 2. Summan viimeinen numero on 1. Tämä voidaan muodostaa summilla $3 + 8$, $4 + 7$ ja $5 + 6$, eikä muilla tavoin. Koska toiseksi viimeinen numero on 2, on myös kymmenten paikoilla jokin näistä lukupareista ja samoin satojen paikalla. Asetetaan numeroita ykkösen perään. Satojen paikalle on 6 vaihtoehtoa, kymmenten paikalle 4 (eli kaikki muut paitsi satoihin valittu tai sen pari) ja ykkösten paikalle 2. Yhteensä siis $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ vaihtoehtoa.

Tehtävä 2.

Piirretään ympyrä ja kaksi säännöllistä kuusikulmiota. Pienemmän kuusikulmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Suuremman kuusikulmion sivut taas sivuavat ympyrää. Määritä suuremman kuusikulmion pinta-alan suhde pienemmän kuusikulmion pinta-alaan.

Ratkaisu. Olkoon ympyrän säde r. Tällöin pienempi kuusikulmio muodostuu tasasivuisista kolmioista, joiden sivujen pituudet ovat r. Sen ala on siis

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

Suurempi kuusikulmio taas muodostuu tasasivuisista kolmioista, joiden korkeus on r. Tällöin niiden sivujen pituudet ovat $\frac{2}{\sqrt{3}}r$. Kuusikulmion ala on siis

$$6 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} r \cdot r = 2\sqrt{3}r^2.$$

Suuremman kuusikulmion pinta-alan suhde pienemmän kuusikulmion alaan on siis

$$\frac{2\sqrt{3}r^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2} = \frac{4}{3}.$$

Tehtävä 3. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, joilla on se ominaisuus, että

$$f\big(x\,f(y)\big) + f(x)\,f(y) = xy$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Sijoittamalla $x = 1$ saamme yhtälön

$$f\big(f(y)\big) + f(1)\,f(y) = y$$

jokaiselle $y \in \mathbb{R}_+$. Jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ ja $x \neq y$, niin

$$f\big(f(x)\big) + f(1)\,f(x) = x \neq y = f\big(f(y)\big) + f(1)\,f(y),$$

jolloin on oltava $f(x) \neq f(y)$. Seuraavaksi, sijoittamalla alkuperäiseen funktionaaliyhtälöön $y = 1$ saamme yhtälön

$$f\big(f(1)\,x\big) + f(1)\,f(x) = x$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}_+$. Yhdistämällä tämä yhtälöön

$$f\big(f(x)\big) + f(1)\,f(x) = x$$

saamme pienellä sieventämisellä

$$f\big(f(1)\,x\big) = f\big(f(x)\big),$$

jokaiselle $x \in \mathbb{R}_+$. Nyt f saa yhtä suuret arvot pisteissä $f(1)\,x$ ja $f(x)$, joten on oltava

$$f(x) = f(1)\,x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$. Jokaiselle ratkaisulle f on siis olemassa vakio $\alpha \in \mathbb{R}_+$ niin, että $f(x) = \alpha x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$. Sijoittamalla tämä lauseke funktionaaliyhtälöön toteamme, että tietyllä vakion α arvolla funktio on ratkaisu jos ja vain jos

$$\alpha \cdot x\alpha y + \alpha x \cdot \alpha y = xy$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_+$. Mutta koska x ja y supistuvat tästä mukavasti pois, on kyseinen vakio α kelvollinen täsmälleen silloin kun $2\,\alpha^2 = 1$, eli täsmälleen silloin, kun $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Täten halutunlaisia funktioita on täsmälleen yksi, nimittäin se, jolle

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

Tehtävä 4. Onko yhtälöllä $x^2 + y^3 = z^4$ alkulukuratkaisuja?
Ratkaisu. Huomataan ensin, että $y^3 = z^4 - x^2 = (z^2 - x)(z^2 + x)$. Siispä joko

$$\begin{cases} y^2 = z^2 + x \\ y = z^2 - x \end{cases}$$

tai

$$\begin{cases} y^3 = z^2 + x \\ 1 = z^2 - x. \end{cases}$$

Käsitellään ensin ensimmäinen tapaus. Yhtälöt yhteen laskemalla saadaan $y^2 + y = 2z^2$ eli $y \mid 2z$. Jos $y \mid z$, pätee $y = z$, sillä y ja z ovat alkulukuja. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä sijoittamalla yhtälöön $y^2 + y = 2z^2$ saadaan $y = 0$ tai $y = 1$. Nämä vaihtoehdot ovat mahdottomia. Siispä $y \mid 2$, eli $y = 2$. Nyt $y^2 + y = 6 = 2z^2$, joka on myös ristiriita.

Käsitellään nyt jälkimmäinen tapaus. Saadaan

$$y^3 + 1 = 2z^2.$$

Nyt $2z^2 = y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$. Jos $y = 2$, on oltava $2z^2 = 9$, mikä on mahdotonta. Siispä $y > 2$ pariton alkuluku. Nyt $y^2 - y + 1 > y + 1 > 2$, joten $y^2 - y + 1 = 2z$ ja $y + 1 = z$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $y^2 - y + 1$ on pariton ja $2z$ on parillinen.