



Neljän tieteen kisat
Peruskoulun matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 21.1.2022
Tehtävät ja toimintaohjeet
MAOL ry

Opettajan muistilista

Järjestä matematiikkakilpailu perjantaina 21.1.2022 koulunne koe- ja valvontakäytänteiden mukaisesti. Vain tuona päivänä suoritettut kilpailut voidaan huomioida Neljän tieteen kisojen peruskoulun matematiikkakilpailun tuloksissa.

Kilpailussa saa käyttää kynää, pyyhekumia, viivoitinta ja laskinta. Kaikki tehtävät ratkaistaan erilliselle paperille, kuten konseptipaperille. Oppilaan nimen on luettava kaikissa papereissa, joissa on ratkaisuja.

Voit kertoa etukäteen, että kilpailussa on kolme osiota, jotka jaetaan kaikki samaan aikaan. Voit myös kertoa, että kaikki tehtävät tulee ratkaista erilliselle paperille.

Kilpailun karsivan luonteen vuoksi oppilaat eivät välttämättä ehdi tehdä kaikkia kilpailutehtäviä annetussa ajassa. Tehtäviä on runsaasti, jotta oppilailla olisi valinnanvaraa.

Vallitsevan pandemiatilanteen johdosta kilpailuun on mahdollista osallistua sekä koululla tavanomaisin koejärjestelyin että etänä etäkoejärjestelyin. Etänä osallistumiseen riittää tieto teiltä opettajilta, että oppilas on osallistunut kilpailuun etänä, eli työryhmälle ei tarvitse lähettää esimerkiksi karanteenipäätöstä tai lääkärintodistusta.

Alkukilpailusta poiketen oppilaiden vastauksia ei tule esitarkastaa, vaan ne tulee lähettää työryhmälle käyttämällä seuraavan linkin lomaketta viimeistään **perjantaina 21.1.2022 klo 18:00**:

Tässä oli linkki vastausten lähettämiseen.

Kuten alkukilpailun palautelomaketta käyttäessäsi, tarvitset lomakkeen täyttöösi Google-tilin. Jos sinulla ei ole Google-tiliä, ota meihin yhteyttä sähköpostitse osoitteeseen pk.matikka@gmail.com. Ilmaise viestissäsi, kenestä loppukilpailijasta on kyse, jotta kirjaamme paperit oikealle osallistujalle kuuluviksi. Meille voi esittää kysymyksiä myös samaiseen sähköpostiosoitteeseen viestiä lähettämällä.

Ennen lomakkeen täyttämistä tarvitset pdf-muotoiset skannatut tiedostot tai jpeg- tai png-muotoiset kuvat kilpailupapereista. Nimeä dokumentit logiikalla **sukunimi_ etunimi**, jotta nimettömät paperit eivät jää teille tietämättömille.

Alamme tarkastaa kilpailupapereita, kun olemme saaneet ne kaikki. Julkistamme tulokset mahdollisimman pian kilpailupäivän jälkeen.

Suurkiitos loppukilpailun järjestelyihin osallistumisesta!

Terveisin,
peruskoulun matematiikkakilpailutyöryhmä

Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu 21.1.2022



Vastaa kaikkiin tehtäviin erilliselle paperille. Kirjoita nimesi jokaiseen paperiin selkeällä käsialalla. Sallitut välineet: kynä, kumi, viivain, laskin. Aikaa kaikkien osioiden tehtävien ratkaisemiseen on yhteensä 120 minuuttia.

Osa A

Kaikki tämän osion tehtävät (1 – 6) ovat 2 pisteen arvoisia.

1. Käytössäsi on luvut 1, 2, 3, 4 ja 5 sekä laskutoimituksista yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Jokaista lukua ja laskutoimitusta tulee käyttää ja niitä saa käyttää vain kerran.
 - a. Kirjoita ja laske laskutoimitus, jonka vastaus on mahdollisimman suuri.
 - b. Kirjoita ja laske laskutoimitus, jonka vastaus on mahdollisimman pieni.

2. Laske

$$\frac{8^x}{2^y},$$

kun $3x - y = 12$.

3. Eräs nettisivu arvioi bloggaajien suosion S seuraavan kaavan avulla:

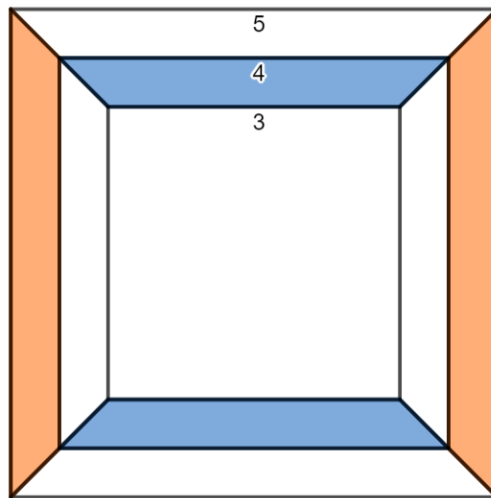
$$S = \frac{T}{T + F},$$

jossa T on positiivisten kommenttien määrä ja F on negatiivisten kommenttien määrä julkaisuissa. Selvitä, millä kaavalla saadaan selville positiivisten kommenttien määrä bloggaajien julkaisuista.

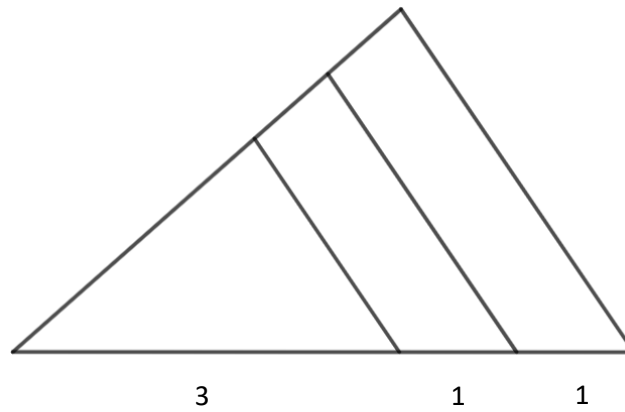
4. Olet saanut erääseen tavarataloon alennuskupongin, jolla saat joko 20 prosentin alennuksen kertaostoksesta tai 30 prosentin alennuksen 50 € ylittävästä ostoksen osasta ja 10 € lisäalennuksen. Saat valita, kumman eduista käytät ostoksen yhteydessä.

Kumpi kupongin alennuksista oikeuttaa suurempaan alennukseen, kun ostosten kokonaishinta on ennen alennuksia 60 €?

5. Laske väritetyn alueen pinta-ala, kun kuvio koostuu kolmesta sisäkkäisestä neliöstä.



6. Kuinka suuren osuuden uloimman kolmion alasta sisin kolmio peittää? Kuvassa on kolme samansuuntaista janaa.



Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu 21.1.2022



Vastaa kaikkiin tehtäviin erilliselle paperille. Kirjoita nimesi jokaiseen paperiin selkeällä käsialalla. Sallitut välineet: kynä, kumi, viivain, laskin. Aikaa kaikkien osioiden tehtävien ratkaisemiseen on yhteensä 120 minuuttia.

Osa B

Tämän osion tehtävissä (7 – 13) tarkastellaan koulupäivää, joka koostuu kuudesta (6 kpl) 45 minuutin oppitunnista.

Jokaisena koulupäivänä on yksi 90 minuutin pituinen kaksoistunti (eli kaksi 45 minuutin oppituntia peräkkäin ilman taukoa) ja tämän päätteeksi 30 minuutin mittainen ruokailu. Kaikkien muiden oppituntien päätteeksi on 15 minuutin mittainen välitunti, paitsi viimeisen oppitunnin päätteeksi, kun oppilaat pääsevät kotiin.

7. Kuinka monta oppituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos välitunteja ja ruokailuja ei lasketa oppitunneiksi? [2p]
8. Kuinka monta välituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos ruokailua ei lasketa välitunniksi? [2p]
9. Kuinka monta minuuttia välituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos ruokailua ei lasketa välitunniksi? [2p]

Oletetaan nyt, että ensimmäinen oppitunti alkaa aina klo 8:00.

10. Mihin aikaan koulupäivä päättyy jokaisena koulupäivänä? [3p]
11. Jos ruokailu ei voi olla päivän päätteeksi, mihin kellonaikoihin ruokailu voi kullakin luokalla olla? [3p]

Mietit rinnakkaisluokalla opiskelevan parhaan ystäväsi kanssa, millä todennäköisyydellä ruokailunne osuu samaan aikaan. Ruokaillette samaan aikaan, jos sinun ja ystäväsi luokille on merkitty ruokailu samaan aikaan lukujärjestyksessä. Koulupäivä ei voi päättyä ruokailuun.

12. Millä todennäköisyydellä syötte ystäväanne kanssa molemmat aikaisimmassa mahdollisessa ruokailussa maanantaina, jos ruokailut arvottaisiin umpimähkään täysin satunnaisesti? [6p]
13. Millä todennäköisyydellä syötte ystäväanne kanssa samassa ruokailussa maanantaina, jos ruokailut arvottaisiin umpimähkään täysin satunnaisesti? [6p]

Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu 21.1.2022



Vastaa kaikkiin tehtäviin erilliselle paperille. Kirjoita nimesi jokaiseen paperiin selkeällä käsialalla. Sallitut välineet: kynä, kumi, viivain, laskin. Aikaa kaikkien osioiden tehtävien ratkaisemiseen on yhteensä 120 minuuttia.

Osa C

Kaikki tämän osion tehtävät (14 – 18) ovat 6 pisteen arvoisia.

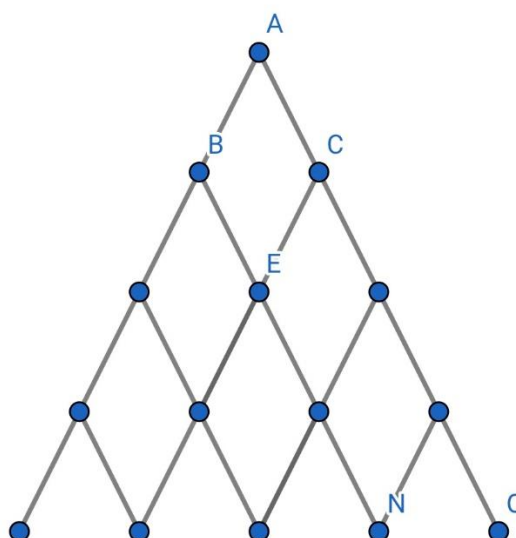
14. Taneli leikkii pikkusisarustensa kanssa leikkijunaradalla. Hän kasaa 100 cm pitkän suoran radanpätkän, ja pikkusisarukset lähettävät kaksi junaa raidetta pitkin vastakkaisiin suuntiin.

Oletetaan, että junien nopeus pysyy samana koko radanpätkän. Jos toinen junista on toista

- puolet
- viidenneksen
- n . osan, $n > 0$,

nopeampi, missä kohtaa rataa junat kohtaavat?

15. Eräässä pelissä pelinappula asetetaan aluksi oheisen kaavion mukaisella pelilaudalla pisteeseen A. Pelinappulaa voi liikuttaa yhdestä sinisestä pisteestä toiseen alaviistoon, jos näitä yhdistää pelilaudalla jana. Esimerkiksi pisteestä B ei ole mahdollista liikkua pisteeseen A.



Kuinka monta erilaista reittiä pisteestä A voi kulkea pisteeseen

- E?
- O?
- N?

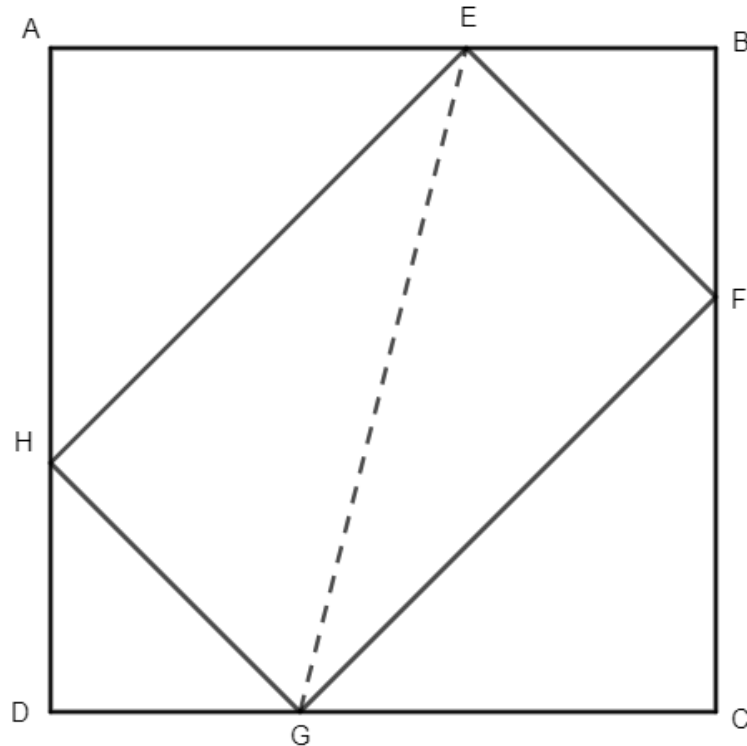
16. Tarkastellaan kolminumeroisia lukuja, joissa kaikki numerot ovat eri numeroita eikä yksikään näistä ole nolla. Tällöin numerot voidaan järjestää kuudeksi eri luvuksi. Tällaista kolminumeroista lukua kutsutaan keskiverroksi, jos sen kaikkien järjestysten keskiarvo on luku itse.

Esimerkiksi luku 518 on keskiverto, sillä

$$518 = \frac{518 + 581 + 158 + 185 + 815 + 851}{6}$$

Mikä on suurin mahdollinen keskiverto luku?

17. Suorakulmion ABCD vastakkaisista kulmista leikataan irti yhdenmuotoiset (identtiset) tasakylkiset kolmiot kuvan mukaisesti, jolloin jäljelle jää suorakulmio EFGH. Selvitä janan EH pituus, kun poisleikatun alueen pinta-ala on 450 cm^2 .



18. Oletetaan, että jokaisena vuotena on 365 päivää ilman karkausvuosia. 21.1.2022 on perjantai. Minä vuonna 21.1. on seuraavan kerran perjantai?

Grundskolans matematiktävling, final

21.1.2022



Lös alla uppgifter på separat papper. Skriv ner ditt namn läsbart på varje papper. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi, räknare. Provtiden för alla delar är 120 minuter totalt.

Del A

Alla uppgifter in denna del (1 – 6) ger 2 poäng.

1. Du får använda talen 1, 2, 3, 4 och 5 och räkneoperationerna addition, subtraktion, multiplikation och division. Alla tal och räkneoperationer måste användas och de får användas bara en gång.
 - a. Bilda ett uttryck, vars svar är så stort som möjligt. Beräkna värdet.
 - b. Bilda ett uttryck, vars svar är så litet som möjligt. Beräkna värdet.

2. Räkna

$$\frac{8^x}{2^y},$$

då $3x - y = 12$.

3. På en nätsida utvärderas bloggares popularitet S med hjälp av följande formel:

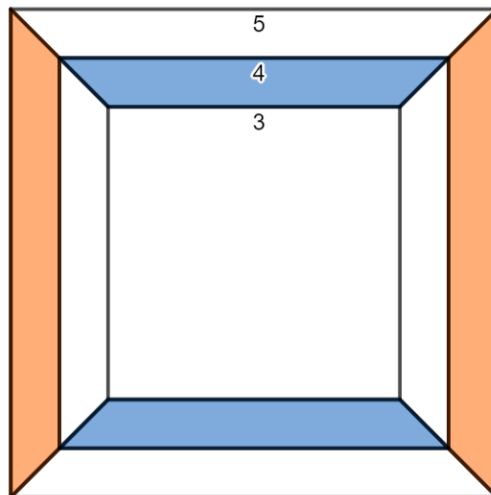
$$S = \frac{T}{T + F},$$

där T är antalet positiva kommentarer och F antalet negativa kommentarer till de skrivelser som bloggarna gjort. Ta reda på med vilken formel man kan räkna ut antalet positiva kommentarer till bloggarnas skrivelser.

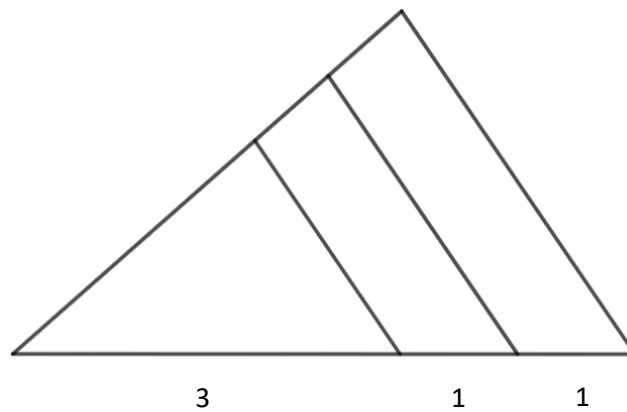
4. Du har fått en rabattkupong till ett varuhus. Med kupongen får du antingen 20 procents rabatt på ett engångsköp eller 30 procents rabatt på den del av inköpet som överstiger 50 € och dessutom 10 € tilläggsrabatt.

Vilken av kupongens rabatter ger större rabatt då priset innan rabatt är 60 €?

5. Figuren består av tre kvadrater. Beräkna arean av det färgade området.



6. Hur stor del av den yttersta triangeln utgör den innersta triangeln? I figuren finns tre sträckor som är parallella.



Grundskolans matematiktävling, final

21.1.2022



Lös alla uppgifter på separat papper. Skriv ner ditt namn läsbart på varje papper. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi, räknare. Provtiden för alla delar är 120 minuter totalt.

Osa B

I denna del (uppgifter 7 – 13) undersöker vi en skoldag som består av sex (6 st) 45 minuter långa lektioner. Under varje skoldag förekommer en 90 minuter lång dubbeltimme (alltså två 45 minuter långa lektioner efter varandra utan paus) och efter denna en 30 minuter lång lunchpaus. Efter alla övriga lektioner är en 15 minuter lång rast insatt i schemat, förutom efter den sista lektionen då eleverna får gå hem.

7. Hur många lektioner finns det på en dag? [2p]
8. Hur många raster finns det på en dag, då vi inte räknar lunchen som en rast? (2p)
9. Hur många minuter utgör rasterna under en skoldag, då vi inte räknar lunchen som en rast? (2p)

Vi antar nu att den första lektionen alltid börjar klockan 8.00.

10. Vilken tid avslutas skoldagen? (3p)
11. Om lunchen inte kan vara i slutet på dagen, vilka tider kan lunchen infalla för de olika klasserna?

Tillsammans med en kompis från parallellklassen funderar ni på vilken sannolikheten är att ni äter lunch samtidigt under skoldagen. Ni äter lunch samtidigt om lunchen är insatt på samma tidpunkt i bådas scheman. Skoldagen kan inte avslutas med lunchen.

12. Med vilken sannolikhet äter du och din kompis lunch tillsammans i den tidigaste matturen en måndag, om man dragit lott om de olika matturerna?
13. Med vilken sannolikhet äter du och din kompis lunch tillsammans under en måndag, om man dragit lopp om de olika matturerna?

Grundskolans matematiktävling, final

21.1.2022



Lös alla uppgifter på separat papper. Skriv ner ditt namn läsbart på varje papper. Tillåtna hjälpmedel: blyertspenna, linjal, suddgummi, räknare. Provtiden för alla delar är 120 minuter totalt.

Del C

Alla uppgifter in denna del (14 – 18) ger 6 poäng.

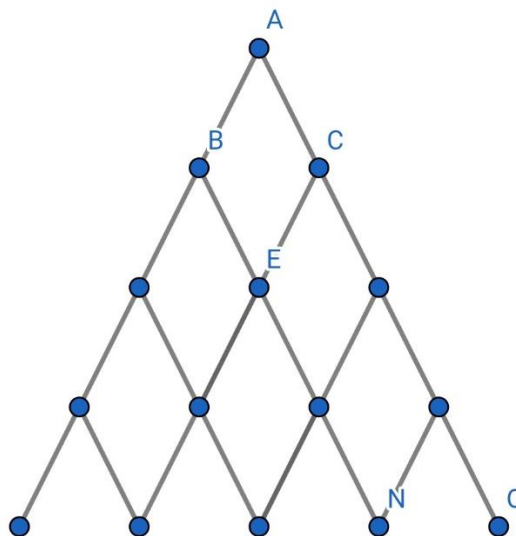
14. Daniel leker med en tågbanan tillsammans med sina lillasysrstrar. Han sätter ihop en rak 100 cm lång sträcka av tågbanan och lillasysrstrarna skickar iväg två tåg från båda ändorna i motsatt riktning.

Vi antar att tågen håller samma hastighet hela sträckan. Om det ena tågets hastighet är

- a. hälften
- b. en femtedel
- c. en n :tedel ($n > 0$)

snabbare än det andra tågets hastighet, var på sträckan möts då tågen?

15. I ett spel placerar man först spelpjäsen i punkten A i figuren. Spelpjäsen kan flyttas från en blå punkt snett nedåt till en annan, om punkterna är förenade med en sträcka. Till exempel är det inte möjligt att flytta pjäsen från punkten B till punkten A.



Hur många olika rutter kan man ta från punkt A till punkt

- a. E?
- b. O?
- c. N?

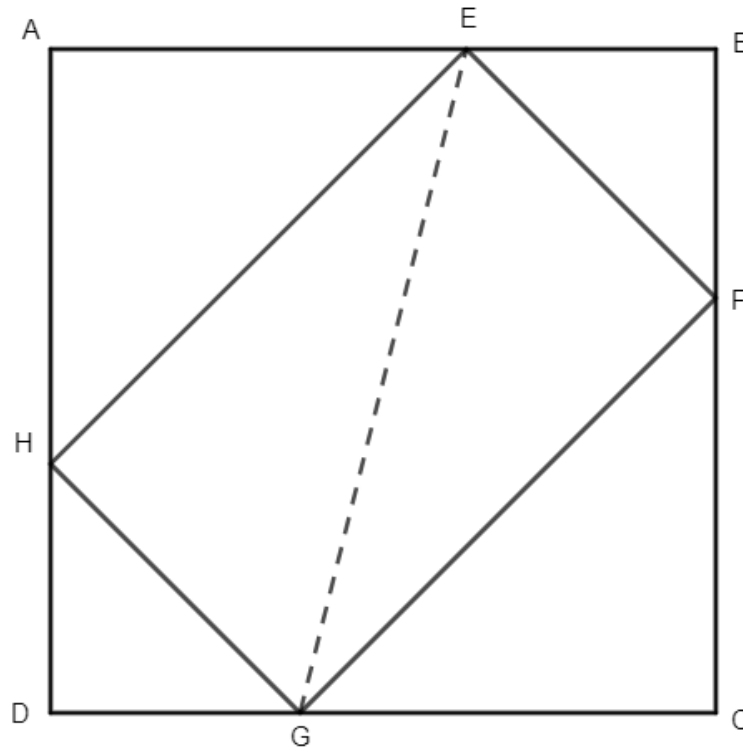
16. Av tre siffror kan man bilda sex olika tresiffriga tal där ingen siffra är noll. Ett tal som bildas på detta sätt kan kallas genomsnittligt om det utgör medeltalet av alla sex möjliga tal som kan bildas av de siffror som förekommer i talet.

Till exempel är 518 ett genomsnittligt tal, eftersom

$$518 = \frac{518 + 581 + 158 + 185 + 815 + 851}{6}$$

Vilket är det största genomsnittliga talet som kan bildas?

17. Motstående vinklar i rektangeln ABCD klippas av i formen av likformiga (identiska) likbenta trianglar. Efteråt består figuren bara av rektangeln EFGH. Lös längden för sträcka EH om arean hos de avklippta trianglarna är 450 cm^2 totalt.



18. Vi antar att varje år har 365 dagar och att inga skottår förekommer. 21.1.2022 är en fredag. Vilket år är 21.1 följande gång en fredag?

Comprehensive school mathematics competition
Final round, Jan 21th, 2022



Write all your solutions on a separate sheet of paper. Write your name on all of the papers you wish to submit with clear handwriting. You may use a pencil, a ruler, an eraser, and a calculator. The time allotted for all three sections together is 120 minutes.

Section A

The tasks in this section (1 – 6) are worth 2 points each.

1. In this task, you may use each of the numbers 1, 2, 3, 4, and 5, and the operations addition, subtraction, multiplication, and division. You have to use each number and operation, and you cannot use either twice.

- a. Write down the calculation whose answer is the greatest. Calculate the answer.
- b. Write down the calculation whose answer is the least. Calculate the answer.

2. Find

$$\frac{8^x}{2^{y'}}$$

when $3x - y = 12$.

3. A certain website evaluates the popularity S of bloggers using the following equation:

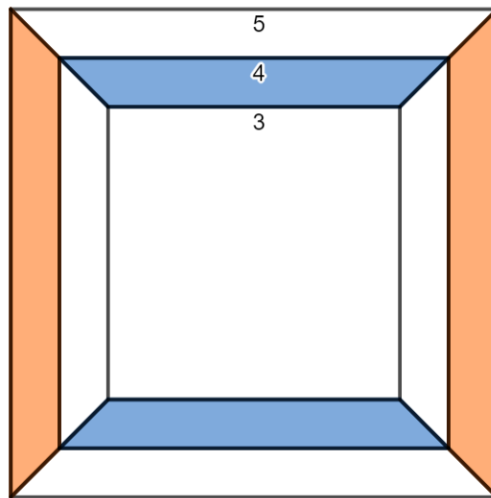
$$S = \frac{T}{T + F},$$

in which T is the number of positive comments and F is the number of negative comments in their posts. Solve the equation so that it computes the number of positive comments from the bloggers' posts.

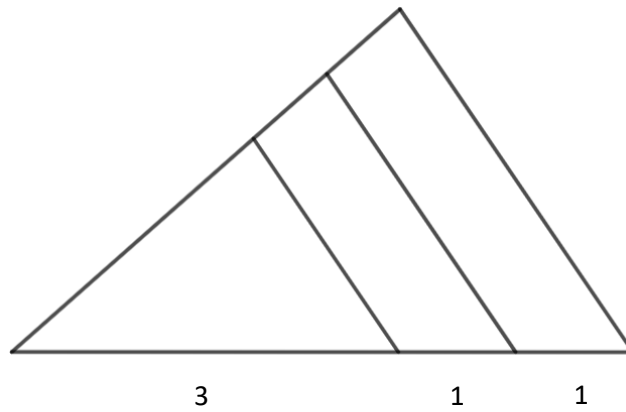
4. You have gotten a price reduction coupon to a certain department store. The coupon either gives a 20 percent price reduction, or a 30 percent price reduction for the amount exceeding 50 € and a 10 € additional price reduction. You may choose which one of the two options you use at the cashier.

Which of the two options on the coupon gives a larger price reduction if the total before reductions is 60 €?

5. Find the area of the coloured area, given that the figure consists of three nested squares.



6. Find the fraction of the area that the innermost of the three nested triangles covers of the outermost of the three. There are three parallel lines in the figure.



Comprehensive school mathematics competition

Final round, Jan 21th, 2022



Write all your solutions on a separate sheet of paper. Write your name on all of the papers you wish to submit with clear handwriting. You may use a pencil, a ruler, an eraser, and a calculator. The time allotted for all three sections together is 120 minutes.

Section B

In this section (in tasks 7 – 13), let us consider a school day that consists of 6 lessons, each 45 minutes long.

In each school day, there is a 90-minute double lesson (i.e. two 45-minute lessons one after the other with no break in between) and after this, a 30-minute lunch break. At the end of all other lessons, there is a 15-minute break, except after the last lesson of the day, when the students get to go home.

7. How many lessons are there during each day if the breaks and lunch breaks are not counted as lessons? [2p]
8. How many breaks are there during each day if the lunch break is not counted as a break? [2p]
9. How many minutes of break are there during each day if the lunch break is not counted as a break? [2p]

Let us now assume that the first lesson always starts at 8:00.

10. At what time does each school day end? [3p]
11. If the lunch break cannot be at the end of a school day, at what times can the lunch break for each class be during the day? [3p]

You are wondering with a friend from another class what the probability for eating lunch at the same time is. You are eating lunch at the same time if your lunch break is the same in your daily schedule. The lunch break cannot be at the end of a school day.

12. What is the probability of you eating at the same time with your friend on Monday at the earliest possible lunch break time if the lunch breaks were assigned to each class completely randomly? [6p]
13. What is the probability of you eating at the same time with your friend on Monday if the lunch breaks were assigned to each class completely randomly? [6p]

Comprehensive school mathematics competition

Final round, Jan 21th, 2022



Write all your solutions on a separate sheet of paper. Write your name on all of the papers you wish to submit with clear handwriting. You may use a pencil, a ruler, an eraser, and a calculator. The time allotted for all three sections together is 120 minutes.

Section C

The tasks in this section (14 – 18) are worth 6 points each.

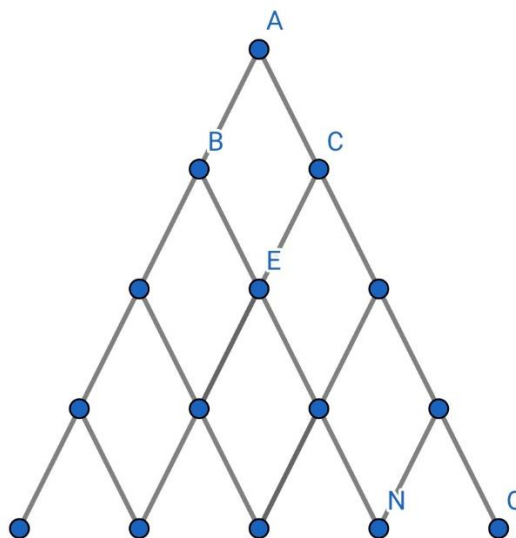
14. Daniel is playing with a toy train track with his younger siblings. He assembles a 100 cm straight train track, and his siblings push trains from each end to opposite directions.

Let us assume the velocity of each of the trains stays the same till the collision. If one of the trains is faster than the other by

- a half,
- a fifth,
- an n th (i.e. by a fraction $1/n$), $n > 0$,

at what point on the track do the trains collide?

15. In a certain game, the game piece is put onto point A on a board like the one in the figure below. The piece can be moved from one blue point to another in a diagonally downwards manner if the points are connected by a line segment. For example, it is not allowed to move from point B to point A.



How many possible routes are there from point A to point

- E?
- O?
- N?

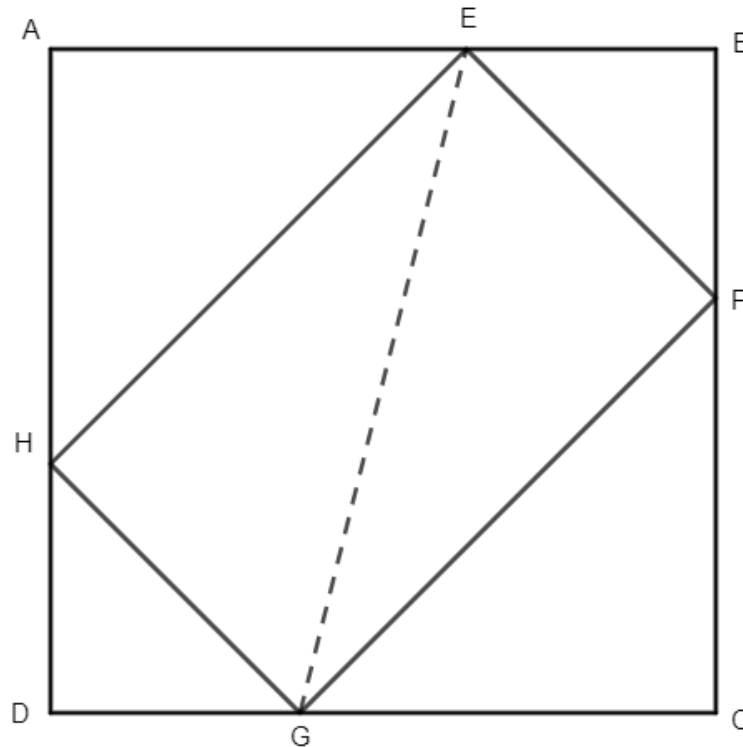
16. Let us consider three-digit numbers that neither do not have repeating digits or have zero in their digits. The digits of these numbers can be ordered into six different numbers. A number with these properties is called *mean* if the average of all of the differently ordered digits is the number itself.

For example, the number 518 is mean as

$$518 = \frac{518 + 581 + 158 + 185 + 815 + 851}{6}$$

Find the greatest mean number.

17. The corners of rectangle ABCD are cut off as two pairs of similar (identical) isosceles triangles, after which rectangle EFGH remains. Find the length of the line segment EH, given that the area of the triangles cut off is 450 cm^2 in total.



18. Let us assume that there are 365 days a year without any leap years. January 21st, 2022 is a Friday. Find the year when January 21st is a Friday for the next time.

Ratkaisut

Osa A

Kaikki tämän osion tehtävät (1 – 6) ovat 2 pisteen arvoisia.

- Käytössäsi on luvut 1, 2, 3, 4 ja 5 sekä laskutoimituksista yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Jokaista lukua ja laskutoimitusta tulee käyttää ja niitä saa käyttää vain kerran.
 - Kirjoita ja laske laskutoimitus, jonka vastaus on mahdollisimman suuri.
 - Kirjoita ja laske laskutoimitus, jonka vastaus on mahdollisimman pieni.

Ratkaisu:

$$a. 5 \cdot 4 + 3 - 1/2 = 20 + 3 - \frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$$

$$b. 1 + 2/3 - 4 \cdot 5 = 1\frac{2}{3} - 20 = -18\frac{1}{3}$$

- Laske

$$\frac{8^x}{2^y},$$

kun $3x - y = 12$.

Ratkaisu:

$$\frac{8^x}{2^y} = \frac{(2^3)^x}{2^y} = 2^{3x-y} = 2^{12} = 4096$$

- Eräs nettisivu arvioi bloggaajien suosion S seuraavan kaavan avulla:

$$S = \frac{T}{T + F},$$

jossa T on positiivisten kommenttien määrä ja F on negatiivisten kommenttien määrä julkaisuissa. Selvitä, millä kaavalla saadaan selville positiivisten kommenttien määrä bloggaajien julkaisuista.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} S &= \frac{T}{T + F} \\ S(T + F) &= T \\ ST + SF &= T \\ T - ST &= SF \\ T(1 - S) &= SF \\ T &= \frac{SF}{1 - S} \end{aligned}$$

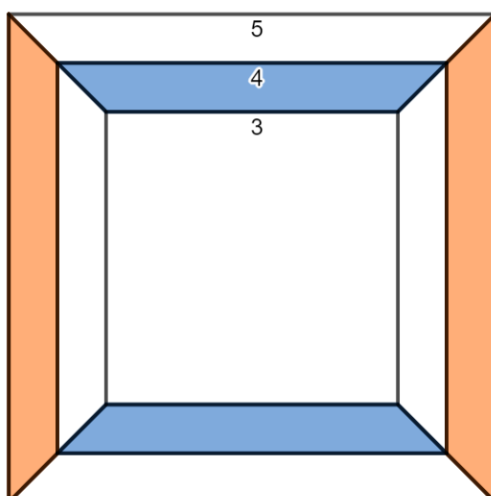
- Olet saanut erääseen tavarataloon alennuskupongin, jolla saat joko 20 prosentin alennuksen kertaostoksesta tai 30 prosentin alennuksen 50 € ylittävästä ostoksen osasta ja 10 € lisäalennuksen. Saat valita, kumman eduista käytät ostoksen yhteydessä.

Kumpi kupongin alennuksista oikeuttaa suurempaan alennukseen, kun ostosten kokonaishinta on ennen alennuksia 60 €?

Ratkaisu:

Kupongilla saa joko $0,2 \cdot 60 \text{ €} = 12 \text{ €}$ tai $(60 \text{ €} - 50 \text{ €}) \cdot 0,3 + 10 \text{ €} = 13 \text{ €}$ alennusta. Suuremman alennusprosentin oikeuttaa siis vaihtoehdoista toinen.

5. Laske väritetyn alueen pinta-ala, kun kuvio koostuu kolmesta sisäkkäisestä neliöstä.



Ratkaisu:

Sinisen alueen ala on puolet kahden sisemmän neliön alojen erotuksesta:

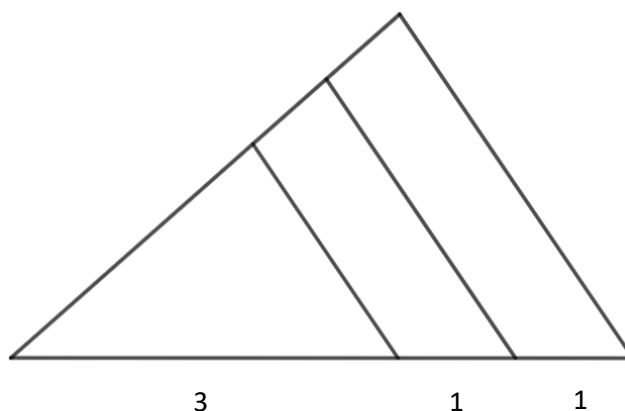
$$\frac{1}{2}(4^2 - 3^2) = \frac{1}{2}(16 - 9) = \frac{7}{2}$$

Oranssin alueen ala on vastaavasti

$$\frac{1}{2}(5^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(25 - 16) = \frac{9}{2}$$

Nämä ovat yhteensä $\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

6. Kuinka suuren osuuden uloimman kolmion alasta sisin kolmio peittää? Kuvassa on kolme samansuuntaista janaa.



Ratkaisu:

Pinta-alojen suhde on vastinsivujen suhteen neliö:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Ratkaisut

Osa B

Tämän osion tehtävissä (7 – 13) tarkastellaan koulupäivää, joka koostuu kuudesta (6 kpl) 45 minuutin oppitunnista.



Jokaisena koulupäivänä on yksi 90 minuutin pituinen kaksoistunti (eli kaksi 45 minuutin oppituntia peräkkäin ilman taukoa) ja tämän päätteeksi 30 minuutin mittainen ruokailu. Kaikkien muiden oppituntien päätteeksi on 15 minuutin mittainen välitunti, paitsi viimeisen oppitunnin päätteeksi, kun oppilaat pääsevät kotiin.

7. Kuinka monta oppituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos välitunteja ja ruokailuja ei lasketa oppitunneiksi? [2p]

Ratkaisu:

6 oppituntia.

8. Kuinka monta välituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos ruokailua ei lasketa välitunniksi? [2p]

Ratkaisu:

3 välituntia, jos ruokailu on päivän keskellä, ja 4 välituntia, jos ruokailu on päivän päätteeksi.

9. Kuinka monta minuuttia välituntia jokaisen koulupäivän aikana on, jos ruokailua ei lasketa välitunniksi? [2p]

Ratkaisu:

45 minuuttia tai 60 minuuttia.

Oletetaan nyt, että ensimmäinen oppitunti alkaa aina klo 8:00.

10. Mihin aikaan koulupäivä päättyy jokaisena koulupäivänä? [3p]

Ratkaisu:

Koulupäivä koostuu 6 oppitunnista (45 min), 3 välitunnista (15 min) ja ruokailusta (30 min). Yhteensä kesto on siis $6 \cdot 45 \text{ min} + 3 \cdot 15 \text{ min} + 30 \text{ min} = 5 \text{ h } 45 \text{ min}$, eli koulupäivä päättyy 13:45.

Jos ruokailu on päivän päätteeksi, saadaan vastaavasti 15 minuuttia pidempi koulupäivä, joka päättyy klo 14:00.

11. Jos ruokailu ei voi olla päivän päätteeksi, mihin kellonaikoihin ruokailu voi kullakin luokalla olla? [3p]

Ratkaisu:

Ruokailu voi olla 2., 3., 4. tai 5. tunnin päätteeksi eli 1., 2., 3. tai 4. tunnilla alkavan kaksoistunnin päätteeksi. Lukujärjestyksen n . tunti alkaa klo $7:00 + n:00$, eli n . tunnilla alkava kaksoistunti päättyy klo $7:00 + 1:30 + n:00 = 8:30 + n:00$.

Ruokailu alkaa siis jonakin seuraavista ajoista:

$$8:30 + 1:00 = 9:30$$

$$8:30 + 2:00 = 10:30$$

$$8:30 + 3:00 = 11:30$$

$$8:30 + 4:00 = 12:30$$

Ruokailu ei voi alkaa klo 13:30, koska tällöin se päättyisi klo 14:00, kun koulupäivä päättyy.

Mietit rinnakkaisluokalla opiskelevan parhaan ystäväsi kanssa, millä todennäköisyydellä ruokailunne osuu samaan aikaan. Ruokailette samaan aikaan, jos sinun ja ystäväsi luokille on merkitty ruokailu samaan aikaan lukujärjestyksessä. Koulupäivä ei voi päättyä ruokailuun.

12. Millä todennäköisyydellä syötte ystäväenne kanssa molemmat aikaisimmassa mahdollisessa ruokailussa maanantaina, jos ruokailut arvottaisiin umpimähkään täysin satunnaisesti? [6p]

Ratkaisu:

Mahdollisia ruokailuajankohtia on 4. Todennäköisyys sille, että mieltijä itse syö aikaisimmassa mahdollisessa ruokailussa, on $\frac{1}{4}$, ja todennäköisyys sille, että hänen kaverinsa syö aikaisimmassa mahdollisessa ruokailussa, on $\frac{1}{4}$.

Toisin sanoen todennäköisyys sille, että sekä mieltijä että hänen kaverinsa syövät ensimmäisessä mahdollisessa ruokailussa, on:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

13. Millä todennäköisyydellä syötte ystäväenne kanssa samassa ruokailussa maanantaina, jos ruokailut arvottaisiin umpimähkään täysin satunnaisesti? [6p]

Ratkaisu:

Mahdollisia ruokailuajankohtia on 4. Todennäköisyys sille, että mieltijä itse syö missä tahansa tietyssä näistä, on $\frac{1}{4}$, ja todennäköisyys sille, että hänen kaverinsa syö samassa ruokailussa, on $\frac{1}{4}$.

Toisin sanoen todennäköisyys sille, että sekä mieltijä että hänen kaverinsa syövät tietyssä samassa ruokailussa, on:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Koska ruokailuja on 4, todennäköisyys samalle ruokailuajankohdalle on

$$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Ratkaisut

Osa C

Kaikki tämän osion tehtävät (14 – 18) ovat 6 pisteen arvoisia.



14. Taneli leikkii pikkusisarustensa kanssa leikkijunaradalla. Hän kasaa 100 cm pitkän suoran radanpätkän, ja pikkusisarukset lähettävät kaksi junaa raidetta pitkin vastakkaisiin suuntiin.

Oletetaan, että junien nopeus pysyy samana koko radanpätkän. Jos toinen junista on toista

- puolet
- viidenneksen
- n . osan, $n > 0$,

nopeampi, missä kohtaa rataa junat kohtaavat?

Ratkaisu:

Tehtävä on mahdollista ratkaista esimerkiksi yhtälöllä tai yhtälöparilla.

Olkoon vasemmanpuolisen junan nopeus v_1 ja oikeanpuoleisen vastaavasti v_2 . Tällöin ajanhetkellä t vasemmanpuolinen juna on kohdassa $v_1 t$ ja oikeanpuolinen taas vastaavasti $100 - v_2 t$. Junat kohtaavat, kun ne ovat samassa kohdassa. Tällöin

$$\begin{aligned}v_1 t &= 100 - v_2 t \\v_1 t + v_2 t &= 100 \\(v_1 + v_2)t &= 100 \\t &= \frac{100}{v_1 + v_2}.\end{aligned}$$

Tällä ajanhetkellä junat ovat kohdassa

$$\frac{100v_1}{v_1 + v_2}.$$

- a. Olkoon nopeamman junan nopeus $\frac{3}{2}v$ ja hitaamman taas vastaavasti v . Sijoittamalla paikan antavaan lausekkeeseen saadaan

$$\frac{100v}{\frac{3}{2}v + v} = \frac{100}{\frac{5}{2}} = 100 \cdot \frac{2}{5} = 40.$$

Junat ovat siis 40 cm kohdalla (eli 60 cm kohdalla toisesta päädyistä).

- b. Olkoon nopeamman junan nopeus $\frac{6}{5}v$ ja hitaamman taas vastaavasti v . Sijoittamalla paikan antavaan lausekkeeseen saadaan

$$\frac{100v}{\frac{6}{5}v + v} = \frac{100}{\frac{11}{5}} = 100 \cdot \frac{5}{11} = 45,45 \dots$$

Junat ovat siis noin 45,5 cm kohdalla (eli 54,5 cm kohdalla toisesta päädyistä).

Junat ovat siis 40 cm kohdalla (eli 60 cm kohdalla toisesta päädyistä mitattuna).

- c. Olkoon nopeamman junan nopeus $\frac{n+1}{n}v$ ja hitaamman taas vastaavasti v .

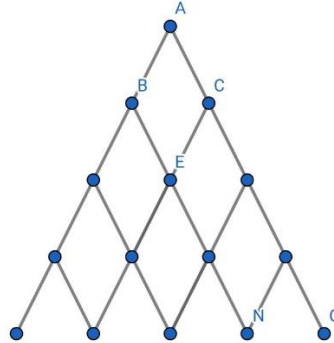
Sijoittamalla paikan antavaan lausekkeeseen saadaan

$$\frac{100v}{\frac{n+1}{n}v + v} = \frac{100}{\frac{2n+1}{n}} = 100 \cdot \frac{n}{2n+1} = \frac{100n}{2n+1}.$$

Toisesta päädyistä mitattuna siis

$$\begin{aligned}100 - \frac{100n}{2n+1} &= \frac{100(2n+1) - 100n}{2n+1} = \frac{100 \cdot 2n + 100 - 100n}{2n+1} \\&= \frac{100n + 100}{2n+1} = \frac{100(n+1)}{2n+1}.\end{aligned}$$

15. Eräässä pelissä pelinappula asetetaan aluksi oheisen kaavion mukaisella pelilaudalla pisteeseen A. Pelinappulaa voi liikuttaa yhdestä sinisestä pisteestä toiseen alaviistoon, jos näitä yhdistää pelilaudalla jana. Esimerkiksi pisteestä B ei ole mahdollista liikkua pisteeseen A.



Kuinka monta erilaista reittiä pisteestä A voi kulkea pisteeseen

- E?
- O?
- N?

Ratkaisu:

Nimetään pisteet aakkosjärjestyksessä riveittäin.

- Mahdollisia reittejä ovat ABE ja ACE, eli reittejä on 2.
- Ainut mahdollinen reitti on ACFJO, eli reittejä on 1.
- Mahdollisia reittejä ovat ABEIN, ACEIN, AFIN sekä ACFJN, eli reittejä on 4.

16. Tarkastellaan kolminumeroisia lukuja, joissa kaikki numerot ovat eri numeroita eikä yksikään näistä ole nolla. Tällöin numerot voidaan järjestää kuudeksi eri luvuksi. Tällaista kolminumeroista lukua kutsutaan keskivertoiksi, jos sen kaikkien järjestysten keskiarvo on luku itse.

Esimerkiksi luku 518 on keskiverto, sillä

$$518 = \frac{518 + 581 + 158 + 185 + 815 + 851}{6}$$

Mikä on suurin mahdollinen keskiverto luku?

Ratkaisu:

Lasketaan summa:

abc

acb

bac

bca

cab

+cba

$$100(2a+2b+2c)+10(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c)= 222(a+b+c)$$

Nyt keskiarvo:

$$222(a+b+c)/6= 37(a+b+c)$$

Jotta luku olisi keskiverto, täytyy olla:

$$abc=37(a+b+c), \text{ missä } a+b+c<27$$

Tästä kokeilemalla:

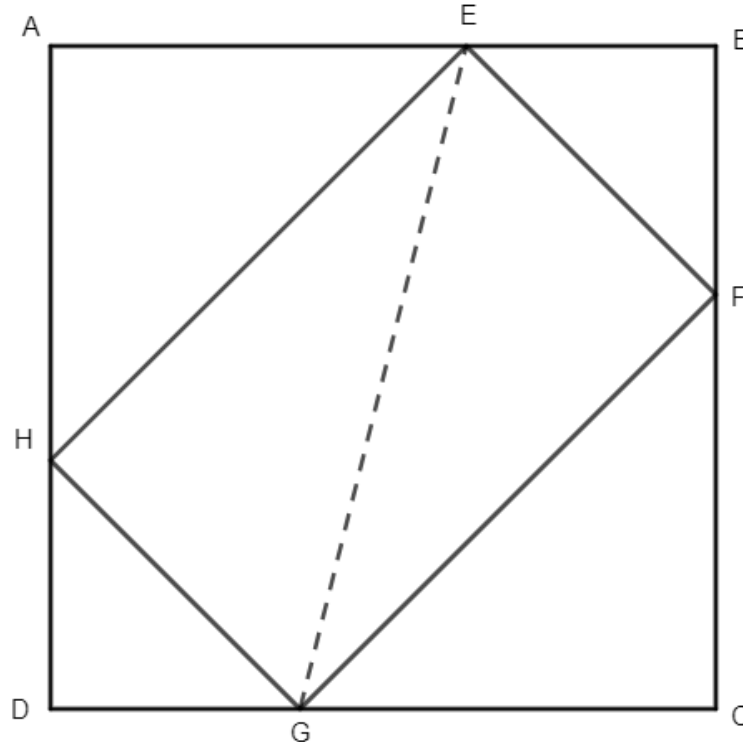
Kun $a+b+c=26$ on $37(a+b+c)=962$ mutta $9+6+2$ ei ole $26 \rightarrow 962$ ei kelpaa

Kun $a+b+c=25$, on $37(a+b+c)=925$, mutta $9+2+5$ ei ole $25 \rightarrow 925$ ei kelpaa

lopulta kun $a+b+c=17$ on $37(a+b+c)=629$ ja $6+2+9=17$

Suurin keskiverto luku on siis 629 .

17. Suorakulmion ABCD vastakkaisista kulmista leikataan irti yhdenmuotoiset (identtiset) tasakylkiset kolmiot kuvan mukaisesti, jolloin jäljelle jää suorakulmio EFGH. Selvitä janan EH pituus, kun poisleikatun alueen pinta-ala on 450 cm^2 .



Ratkaisu:

Virossa käytetyssä tehtävänannossa tuli ratkaista janan EG pituus. Tässä tapauksessa:

Pikkukolmioiden ala yhteensä x^2
 isommat kolmiot yhteensä y^2

$$\text{Eli } x^2 + y^2 = 450$$

$$\begin{aligned} HG^2 &= 2x^2 \\ HE^2 &= 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EG^2 &= HG^2 + HE^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 \\ &= 2(x^2 + y^2) \\ &= 2 * 450 \\ &= 900 \end{aligned}$$

$$\rightarrow EG = 30$$

Suomessa käytetyssä tehtävänannossa tuli selvittää janan EH pituus. Tässä tapauksessa:

Huomataan, että vastakkaisien kulmien kolmiot ovat yhtenevät.

Selvitetään ensin ääritapaukset. Kavennetaan suorakulmiota EFGH niin, että sivun EH pituus lähestyy nollaa. Koska EH on kolmion AEH hypotenuusa, ja tämä kolmio on yhtenevä kolmio CFG kanssa, lähestyy yhtenevien kolmioiden DGH ja BFE alojen

summa poisleikattua pinta-alaa 450 cm^2 . Tästä ääritapaus on se, jossa suorakulmio EFGH surkastuu janaksi, joka sijaitsee $\sqrt{450}$ cm-sivuisen neliön keskellä, ja sivun EH pituus on 0.

Toinen ääritapaus on puolestaan se, jossa kavennetaan suorakulmiota EFGH niin, että sivun EF pituus lähestyy nollaa. Vastaavin argumentein kuin edellä saadaan janan EH pituudeksi tässä ääritapauksessa $\sqrt{2} \cdot \sqrt{450} \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

Kaikki arvot väliltä 0 cm ... 30cm ovat mahdollisia, sillä ensimmäisen tapauksen suorakulmio voidaan muuttaa toiseksi vähitellen siirtämällä kärkipisteitä pitkin neliön sivua. Neliön ABCD ala muuttuu tässä muunnosoperaatiossa (ensin kasvaen ja sitten vähentyen), mutta se ei ole oleellista, vaan oleellista on vain se, että janan pituuden toisesta ääripäästä päästään toiseen.

18. Oletetaan, että jokaisena vuotena on 365 päivää ilman karkausvuosia. 21.1.2022 on perjantai. Minä vuonna 21.1. on seuraavan kerran perjantai?

Ratkaisu:

Huomataan, että $365 = 52 \cdot 7 + 1$. Jokaisena vuonna siis 21.1. viikonpäivä siirtyy eteenpäin yhdellä, eli 21.1. on seuraavan kerran perjantai 7 vuoden päästä eli vuonna 2029.