

1 Pitkän matematiikan yo-tehtäviä ohjelmoimalla

Tähän on koottu viime vuosien pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitustehtäviä, jotka on mahdollista ratkaista ohjelmoinnilla. Vanhempia tehtäviä ei toki ole suunniteltu näin ratkaistavaksi.

Tehtävä 1. [yo 2021K teht. 8]

Tasojoukon A pisteet (x, y) määräytyvät epäyhtälöistä $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$ ja $y \geq x^2$. Tässä tehtävässä on tarkoitus arvioida joukon A pinta-alaa simulaation avulla käyttämällä sitä tietoa, että todennäköisyys on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Arvotaan pisteitä (x, y) suorakulmiosta B , jonka määräävät epäyhtälöt $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 4$.

1. Tee sopivalla ohjelmistolla koodi, joka arpoo 1 000 pistettä suorakulmiosta B ja tulostaa vastauksena niiden pisteiden lukumäärän, jotka kuuluvat joukkoon A . Kerro sanallisesti ja sopivien kuvakaappausten avulla, miten toteutit koodisi. (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi taulukkolaskennan satunnaislukugeneraattoria.) (6 p.)
2. Hille ajoi kohdassa 1 tekemänsä koodin 10 kertaa ja sai alla olevat luvut. Laske tulosten keskiarvo ja arvioi tämän perusteella joukon A pinta-alaa. (6 p.)

Hillen koodin tulosteet: 673, 664, 672, 679, 667, 650, 640, 678, 660, 667

Tehtävä 2. [yo 2019S teht. 7]

Toisen asteen polynomissa $x^2 - nx + n$ esiintyvä luku n arvotaan heittämällä tavallista 6-sivuista noppaa ja polynomissa $x^2 - mx + m$ esiintyvä luku m arvotaan heittämällä 8-sivuista noppaa, jonka silmäluvut ovat $1, 2, \dots, 8$. Kuinka suurella todennäköisyydellä ainakin toisella polynomilla on kaksinkertainen nollakohta?

Tehtävä 3. [yo 2015k teht 12] Italialainen Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle likiarvon $x \approx 1,368808108$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri reaalilukujen joukossa.

b) Kuinka mones Newtonin menetelmän iterointikierron tuottaa ensimmäisen kerran samat yhdeksän desimaalia kuin Fibonaccin likiarvossa, kun alkuarvona on $x_0 = 1$?

Tehtävä 4. [yo 2020K teht. 12] Kahden positiivisen luvun a ja b geometrinen keskiarvo on \sqrt{ab} .

1. Anna esimerkki välin 2–100 kahdesta eri kokonaisluvusta a ja b , joille \sqrt{ab} on kokonaisluku. (3 p.)
2. Satunnaislukugeneraattori arpoo toisistaan riippumatta kaksi kokonaislukua väliltä 1–100 niin, että jokaisen luvun todennäköisyys on $\frac{1}{100}$. Mikä on todennäköisyys sille, että arvottujen lukujen geometrinen keskiarvo on kokonaisluku? Voit laskea tapahtuman klassisen todennäköisyyden tarkasti tai esittää sille simulointiin perustuvan arvion. (9 p.)

Tehtävä 5. [yo 2021K teht. 7]

Liisa pelaa Afrikan tähti -peliä. Hän on löytänyt Afrikan tähden ja on palaamassa Kairoon voittaakseen pelin (aineisto 7.A). Hän on neljän askeleen päässä Kairosta. Kairoon saa pysähtyä, vaikka nopan silmäluku oikeuttaisi matkustamaan pidemmälle.

Jos hän heittää vähintään silmäluvun neljä, hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Jos hän heittää silmäluvun kolme, hän voi olla varma, että seuraavalla heitolla hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Liisa tarvitsee korkeintaan neljä heittoa päästäkseen Kairoon. Oletetaan, että kukaan muu ei voita peliä tätä ennen.

1. Millä todennäköisyydellä Liisa voittaa ensimmäisellä heitolla? (2 p.)
2. Millä todennäköisyydellä Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa päästäkseen Kairoon? (4 p.)
3. Laske niiden heittojen lukumäärän odotusarvo, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon. (6 p.)

Tehtävä 6. [yo 2021K teht. 11, osatehtävä 2]

Lukujono (a_n) määritellään rekursiivisesti kaavoilla $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$ ja $a_{2n+1} = 1 - a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Määritä lukujonon seitsemäs jäsen a_7 ja 2021. jäsen a_{2021} . (8 p.)

Tehtävä 7. [yo 2019 K teht. 9]

Matti seuraa moottoriveneen nopeusmittaria ja kirjaa veneen nopeuden sekunnin välein. Tuloksena on taulukko 9.A.

Arvioi taulukon avulla veneen kulkemaa matkaa käyttämällä numeerisen integroinnin

9.1. puolisuunnikassääntöä (6 p.)

9.2. Simpsonin sääntöä. (6 p.)

aika t	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	sekuntia
nopeus $v(t)$	0	5	12	15	12	15	18	20	22	22	21	km/h

Taulukko 9.A

Tehtävä 8. [yo 2018K teht. 8] Jyrki on 23-vuotias, ja hänellä on kolme nuorempaa sisarusta, joiden ikien tulo on 156. Minkä ikäisiä Jyrkin sisarukset ovat? Esitä kaikki kokonaislukuratkaisut.

Tehtävä 9. [yo 2017S, teht. 7] Tavallista noppaa heitetään kolme kertaa, jolloin saadaan heittojärjestyksessä luvut a , b , c . Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

a) Jono (a, b, c) on aidosti kasvava ja aritmeettinen.

b) Jono (a, b, c) on geometrinen.