

Ylioppilastehtävät ja ohjelmointi

Syksy 2019

13. Joukon alkioden summa (12 p.)

Tarkastellaan joukkoja

$$A_1 = \{0\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{3, 4, 5\}, A_4 = \{6, 7, 8, 9\}, \dots$$

Joukossa A_k on siis k alkioita, jotka ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja joista pienin on yhtä suurempi kuin joukon A_{k-1} suurin alkio. Joukon alkioden summa tarkoittaa sitä, että joukkoon kuuluvat luvut lasketaan yhteen. Esimerkiksi joukon A_3 alkioden summa on $3 + 4 + 5 = 12$.

Määritä joukon A_6 alkioden summa sekä joukon A_{2019} alkioden summa. Muodosta yleinen polynomifunktio $P(k)$, joka antaa joukon A_k alkioden summan kaikilla $k = 1, 2, 3, \dots$

Kevät 2020

12. Geometrisen keskiarvon todennäköisyyksiä 12 p.

Kahden positiivisen luvun a ja b *geometrinen keskiarvo* on \sqrt{ab} .

1. Anna esimerkki välin 2–100 kahdesta eri kokonaisluvusta a ja b , joille \sqrt{ab} on kokonaisluku. **(3 p.)**
2. Satunnaislukugeneraattori arpoo toisistaan riippumatta kaksi kokonaislukua väliltä 1–100 niin, että jokaisen luvun todennäköisyys on $\frac{1}{100}$. Mikä on todennäköisyys sille, että arvottujen lukujen geometrinen keskiarvo on kokonaisluku? Voit laskea tapahtuman klassisen todennäköisyyden tarkasti tai esittää sille simulointiin perustuvan arvion. **(9 p.)**

7. Yatzy 12 p.

Yatzy-noppapelissä pelaaja heittää viittä noppaa. Tutkitaan tarkemmin heittoja, joiden tuloksena saadaan *täyskäsi* tai *neliluku* yhdellä viiden nopan heitolla. Täyskädellä tarkoitetaan tulosta, jossa yksi silmäluku esiintyy kolme kertaa ja joku toinen silmäluku kaksi kertaa. Neliluvussa esiintyy neljä samaa silmälukua ja yksi muu silmäluku.

1. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi, jossa esiintyy kolme kuutosta ja kaksi viitosta. **(3 p.)**
2. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi. **(6 p.)**
3. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan neliluku. **(3 p.)**

Syksy 2020

13. Pinta-ala-algoritmi 12 p.

Tason monikulmio voidaan esittää järjestettynä listana $[(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)]$ kärkipisteitä niin, että monikulmion reuna saadaan yhdistämällä peräkkäiset kärkipisteet sekä ensimmäinen ja viimeinen kärkipiste janoilla. Oletetaan, että monikulmion reuna ei leikkaa itseään. Käytössä on menetelmä, joka laskee annetun kolmion pinta-alan, ja se halutaan yleistää monikulmioille.

1. Piirrä tarkka kuva monikulmiosta, joka vastaa listaa $[(2, 2), (3, -1), (5, 2), (7, 3), (4, 6)]$. (2 p.)

2. Terje ehdottaa seuraavaa algoritmia monikulmion pinta-alan määrittämiseksi:

i. Valitaan satunnainen kärkipiste.

ii. Piirretään siitä janat kaikkiin muihin kärkiin, jolloin muodostuu joukko kolmioita.

iii. Lasketaan näiden kolmioiden pinta-alat yhteen.

Anna esimerkki monikulmiosta, jolle algoritmi antaa väärän pinta-alan ja toinen esimerkki sellaisesta monikulmioista, jonka pinta-alan algoritmi antaa oikein. (5 p.)

3. Aale ehdottaa seuraavaa toimintaohjetta monikulmion pinta-alan määrittämiseksi:

i. Jaetaan monikulmio kolmioihin yhdistämällä sopivasti kärkipisteitä.

ii. Lasketaan yhteen näiden kolmioiden pinta-alat.

Mitä puutteita Aalen ehdotuksessa on, eli miksi tämä ei ole algoritmi? (5 p.)

Piirros laadittu oikein ja tarkasti	2
Esimerkki: Algoritmi antaa oikein esimerkiksi yksikköneliön alan. TAI Algoritmi toimii suorakulmiolle.	2
Esimerkki: Algoritmi ei toimi nelikulmiolle, jonka muoto on "nuolenkärki". TAI Algoritmi ei toimi kunnolla sellaisten monikulmioiden kohdalla, jotka eivät ole kuperia (eli konvekseja), eli esimerkiksi sellaisen nelikulmion, jonka kärjet ovat $(1, -1)$, $(0,0)$, $(-1, -1)$, sekä $(0,1)$.	3
Tätä algoritmia ei voi tällaisenaan käyttää, koska siinä ei ole kerrottu, miten toisiinsa yhdistettävät kärjet valitaan.	5

Kevät 2021

8. Pinta-alan arviointi simuloinnilla 12 p.

Tasojoukon A pisteet (x, y) määräytyvät epäyhtälöistä $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$ ja $y \geq x^2$. Tässä tehtävässä on tarkoitus arvioida joukon A pinta-alaa simulaation avulla käyttämällä sitä tietoa, että todennäköisyys on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Arvotaan pisteitä (x, y) suorakulmiosta B , jonka määräävät epäyhtälöt $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 4$.

1. Tee sopivalla ohjelmistolla koodi, joka arpoo 1 000 pistettä suorakulmiosta B ja tulostaa vastauksena niiden pisteiden lukumäärän, jotka kuuluvat joukkoon A . Kerro sanallisesti ja sopivien kuvakaappausten avulla, miten toteutit koodisi. (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi taulukkolaskennan satunnaislukugeneraattoria.) **(6 p.)**
2. Hille ajoi kohdassa 1 tekemänsä koodin 10 kertaa ja sai alla olevat luvut. Laske tulosten keskiarvo ja arvioi tämän perusteella joukon A pinta-alaa. **(6 p.)**

Hillen koodin tulosteet: 673, 664, 672, 679, 667, 650, 640, 678, 660, 667

7. Afrikan tähti 12 p.

Aineisto

7.A Kuva: Afrikan tähti

Liisa pelaa Afrikan tähti -peliä. Hän on löytänyt Afrikan tähden ja on palaamassa Kairoon voittaakseen pelin (aineisto 7.A). Hän on neljän askeleen päässä Kairosta. Kairoon saa pysähtyä, vaikka nopan silmäluku oikeuttaisi matkustamaan pidemmälle.

Jos hän heittää vähintään silmäluvun neljä, hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Jos hän heittää silmäluvun kolme, hän voi olla varma, että seuraavalla heitolla hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Liisa tarvitsee korkeintaan neljä heittoa päästäkseen Kairoon. Oletetaan, että kukaan muu ei voita peliä tätä ennen.

1. Millä todennäköisyydellä Liisa voittaa ensimmäisellä heitolla? (2 p.)
2. Millä todennäköisyydellä Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa päästäkseen Kairoon? (4 p.)
3. Laske niiden heittojen lukumäärän odotusarvo, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon. (6 p.)

11. Kokonaislukuja 12 p.

1. Kumpi luvuista

$$99^{100^{101}} \quad \text{ja} \quad 101^{100^{99}}$$

on suurempi? **(4 p.)**

2. Lukujono (a_n) määritellään rekursiivisesti kaavoilla $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$ ja $a_{2n+1} = 1 - a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$ Määritä lukujonon seitsemäs jäsen a_7 ja 2021. jäsen a_{2021} . **(8 p.)**

Rekursio

```
def kertoma(n):
```

- ◆ if (n > 0): # Lopetusehto ei toteudu
- ◆◆◆ return (n * kertoma(n-1)) # Kutsuu itseään
- ◆ else: # lopetuksen paluarvo
- ◆◆◆ return 1

Fibonaccin lukujono

Fibonaccin lukujono määritellään rekursiivisesti seuraavasti:^[1]

$$F(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } n = 0 \\ 1 & , \text{ kun } n = 1 \\ F(n - 1) + F(n - 2) & , \text{ kun } n > 1 \end{cases}$$

Toisin sanoen Fibonaccin lukujonon ajatuksena on laskea yhteen kaksi edellistä lukua, ja näin saada seuraavan luvun arvo. Fibonaccin lukujonon ensimmäiset yksitoista lukua järjestyksessä ovat 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Joskus on myös tapana määritellä Fibonaccin lukujonon alkavan ykkösestä eikä nollostasta.

Muita tehtävätyyppejä joita voisi ratkoa ohjelmoimalla?

Tehtävä 8. [yo 2018K teht. 8] Jyrki on 23-vuotias, ja hänellä on kolme nuorempaa sisarusta, joiden ikien tulo on 156. Minkä ikäisiä Jyrkin sisarukset ovat? Esitä kaikki kokonaislukuratkaisut.

Tehtävä 3. [yo 2015k teht 12] Italialainen Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle likiarvon $x \approx 1,368808108$.

- a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri reaalilukujen joukossa.
- b) Kuinka mones Newtonin menetelmän iterointikierron tuottaa ensimmäisen kerran samat yhdeksän desimaalia kuin Fibonaccin likiarvossa, kun alkuarvona on $x_0 = 1$?