

Tehtävä 1

Anni haluaa saada asuntolainaa pankilta. Hän haluaa ostaa 160 000 eurolla asunnon. Pankki voi antaa lainaa maksimissaan 85 % asunnon hinnasta. Anni maksaa lainaa takaisin kuukausittain, 15 vuoden aikana ja hän valitsee tasalyhennyslainan. Lainan viitekorko on 3,50 % ja korkomarginaali 1,18 %.

- Kuinka suuren lainan Anni voi pankilta saada?
- Laske lainanlyhennys.
- Laske ensimmäinen ja viimeinen maksuerä.
- Kuinka paljon korkoa Anni joutuu maksamaan yhteensä pankille?

Malliratkaisu:

maksuerät (kpl)

$$n = 15 \cdot 12 = 180$$

kuukausikorko

$$p_{kk} = \frac{(3,50 + 1,18)\%}{12} = \frac{4,68\%}{12} = 0,0039$$

$$a) 0,85 \cdot 160000 = 136000 \text{ €}$$

$$\text{laina } K = 136000 \text{ €}$$

$$b) \text{ tasalyhennys } L = \frac{136000}{180} = 755,5555\dots \approx 755,56 \text{ €}$$

c) maksuerä = lainan lyhennys + korko

ensimmäinen maksuerä = 755,56 + korko koko lainasta (ei yhtään lyennystä vielä maksettu)

$$755,56 + 0,0039 \cdot 136000 = 755,56 + 530,40 = 1285,96 \text{ €}$$

viimeinen maksuerä = lainan lyhennys + korko lyhennystä (lainasta on jäljellä vain viimeinen lyhennys)

$$755,56 + 0,0039 \cdot 755,56 = 755,56 + 2,95 = 758,51 \text{ €}$$

d) Korko muodostuu aritmeettisesta lukujonosta.

Lukujonon ensimmäinen jäsen: 530,40 €

Lukujonon viimeinen jäsen: 2,95 €

Lukujonon summa:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{530,40 + 2,95}{2} \cdot 180 = \frac{533,35}{2} \cdot 180 = 48001,50 \text{ €}$$

Vastaukset:

a) 136 000 €

b) 755,56 €/kk

c) ensimmäinen maksuerä: 1285,95 €

viimeinen maksuerä: 758,51 €

d) 48 001,50 € korko yhteensä

Tehtävä 2

Petri saa pankilta asuntolainaa. Hän perustaa perheen joten hän ostaa hienon kaksion keskustassa. Hän haluaa maksaa saman verran joka kuukausi ja sitten hän valitsee annuiteittilainan. Lainan on 180 000 euroa, maksuaika on 20 vuotta, maksu kuukausittain ja lainan vuotuinen korko on 2,16 %.

Laske:

- Laske annuiteetin suurus.
- Laske ensimmäinen ja viimeinen maksuerä.
- Kuinka paljon lainaa on jäljellä 12 vuoden kuluttua lainan nostamisesta?
- Kuinka paljon korkoa Petri maksaa yhteensä?

Malliratkaisu:

K (lainapääoma) $K = 180000 \text{ €}$

kuukausikorko $p_{kk} = \frac{2,16\%}{12} = 0,0018$

$q = 1 + 0,0018 = 1,0018$

$n = 20 \cdot 12 = 240$ (kpl maksuerä)

a) annuiteetti kaava:

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

$n:=240$	240
$q:=1.0018$	1.0018
$K:=180000$	180000
$a:=K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$	924.292

$A = 924,29 \text{ €}$

a) Voidaan laskea taulukkolaskennalla. Laaditaan seuraava taulukko:

A	B	C	D	E	F	G
K	180000					
n	240					
q	1,0018					
kuukausikorko	0,0018					
annuiteetti	924,29					
			Annuiteetti – korko	0,0018*laina		Laina – lyhennys
			lyhennys	korko	laina ennen	laina jäljellä
	maksuerä (kpl)	maksuerä				
	1	924,29	600,29	324	180000	179399,71
	2	924,29	601,37	322,92	179399,71	178798,34
	3	924,29	602,45	321,84	178798,34	178195,89
	4	924,29	603,54	320,75	178195,89	177592,35
	5	924,29	604,62	319,67	177592,35	176987,73
	6	924,29	605,71	318,58	176987,73	176382,01
	7	924,29	606,80	317,49	176382,01	175775,21
	8	924,29	607,89	316,40	175775,21	175167,32
	9	924,29	608,99	315,30	175167,32	174558,33
	10	924,29	610,09	314,20	174558,33	173948,24

ensimmäinen maksuerä sisältää:

korko: 324 €

lyhennys: $924,29 - 324 = 600,29 \text{ €}$

	231	924,29	907,82	16,47	9152,72	8244,91
	232	924,29	909,45	14,84	8244,91	7335,46
	233	924,29	911,09	13,20	7335,46	6424,37
	234	924,29	912,73	11,56	6424,37	5511,65
	235	924,29	914,37	9,92	5511,65	4597,28
	236	924,29	916,01	8,28	4597,28	3681,26
	237	924,29	917,66	6,63	3681,26	2763,60
	238	924,29	919,32	4,97	2763,60	1844,29
	239	924,29	920,97	3,32	1844,29	923,31
	240	924,29	922,63	1,66	923,31	0,69
				41830,29		
				korko yhteensä		

viimeinen maksuerä:

korko: 1,66 €

lyhennys: 922,63 €

c) 12 vuotta $k = 12 \cdot 12 = 144$ maksuerää

laina jäljellä kaava:

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

$k = 144$

$A = 924,29$

$q = 1,0018$

$K = 180000$

$$V_{144} = 180000 \cdot 1,0018^{144} - 924,29 \cdot \frac{1 - 1,0018^{144}}{1 - 1,0018}$$

$$V_{144} = 81\,422,0273... \approx 81\,422,03 \text{ €}$$

d) korko yhteensä taulukosta tai laskemalla:

$$924,29 \cdot 240 = 221\,829,60 \text{ €}$$

(maksettu annuiteetti yhteensä)

$221829,60 - 180000 = 41829,60 \text{ €}$

korko yhteensä

Vastaukset:

a) $A = 924,29 \text{ €}$

b) ensimmäinen maksuerä sisältää:

korko: 324 €

lyhennys: $600,29 \text{ €}$

viimeinen maksuerä sisältää:

korko: $1,66 \text{ €}$

lyhennys: $922,63 \text{ €}$

c) laina jäljellä: $81\,422,03 \text{ €}$

d) $41\,829,60 \text{ €}$

Tehtävä 3

Atte on saanut pankilta 95 000 euroa remonttilainaa. Lainan korko on 1,75%. Takaisinmaksuaika on 8 vuotta ja laina lyhennetään kuukausittain. Viiden vuoden jälkeen lainan korko nousee 4,50 prosenttiin.

Laske miten koron nousu vaikuttaa jos laina on:

- tasaerälaina
- annuiteetilaina

Malliratkaisu:

$$K = 95000 \text{ €}$$

$$\text{kuukausikorko (alkuperäinen)} = p_{kk} = \frac{1,75\%}{12} = 0,001458... \approx 0,0015$$

$$q = 1 + 0,0015 = 1,0015$$

$$n = 8\text{vuotta} \cdot 12 = 96 \text{ (maksuerää)}$$

annuiteetti:

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

$$A = 95\,000 \cdot 1,0015^{96} \cdot \frac{1 - 1,0015}{1 - 1,0015^{96}} = 1063,28346... \approx 1063,28 \text{ €}$$

laina jäljellä viiden vuoden jälkeen:

$$V_k = K \cdot q^k - A \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

maksetut erät

$$k = 5 \cdot 12 = 60 \text{ (kpl)}$$

$$V_{60} = 95000 \cdot 1,0015^{60} - 1063,28 \cdot \frac{1 - 1,0015^{60}}{1 - 1,0015}$$

$$V_{60} = 38\,330,19294... \approx 38\,330,19 \text{ €}$$

$$\text{kuukausikorko (uusi, koron nousun jälkeen): } u\text{uusi } p_{kk} = \frac{4,50\%}{12} = 0,00375$$

a) tasaerälaina

annuiteetti pysyy samana mikäli korko nousee, laina-aika pitenee, joten lasketaan kuinka paljon aika pitenee sen jälkeen kun korko on noussut.

$$K = 38330,19 \text{ €}$$

$$q = 1 + u\text{uusi } p_{kk} = 1 + 0,00375 = 1,00375$$

$$A = 1063,28 \text{ €}$$

$$\text{solve}\left(1063,28 = 38330,19 \cdot (1,00375)^x \cdot \frac{1 - 1,00375}{1 - (1,00375)^x}, x\right) \quad x = 38,8028$$

pidennetty aika = 39 kuukautta (maksuerää)

$$60 + 39 = 99 \text{ kk}$$

$$99 - 96 = 3 \text{ kk}$$

b) annuiteetti

Jos korko nousee, lasketaan uuden annuiteetin suurus. Laina-aika pysyy samana.

$$K = 38330,19 \text{ €}$$

$$q = 1,00375$$

$$n = 36 \text{ (kpl) jäljellä vielä 3 vuotta}$$

Talouseläskentaohjelma

N:	36
I(%):	4.5
PV:	38330.2
Pmt:	1140.2052671718
FV:	0.
PpY:	12
CpY:	12
PmtAt:	LOPPU

Muokkaa maksuerää, Pmt

annuiteetin suurus kasvaa:

$$\frac{1140,21}{1063,28} = 1,07235... \text{ kasvaa noin } 7\%$$

Vastaukset:

- laina-aika pitenee 3 kuukauden verran
- annuiteetin suurus kasvaa noin 7%

Tehtävä 4

Autolaina. Vertaillaan auton kulutuksia mikäli auto on diesel tai sähköauto.

Johannalle on luvattu autolaina pankilta. Lainapääoma on 50000 euroa ja hän halua maksaa lainaa takaisin kuukausittain, viiden vuoden aikana. Hän valitsee annuiteettilaina, korolla 4,5%. Johanna ei tiedä paljon autoista joten hän tekee alla olevan taulukon mihin hän laittaa kaikki kulut ja kustannukset. Autokaupassa hänellä oli tarjottu 2 erilaista autoa: Volvo XC-60 ja Tesla Model 3. Johanna ajaa noin 10000 km/vuosi. Kumpi auto on edullisempi? Käytetään taulukossa olevia tietoja. Laske annuiteetti, kaikki kulut ja kustannukset 5 vuoden aikana ja auta Johannaa tekemään hyvän ja kannattavan ostopäätöksen.

auton malli	Volvo XC-60 (2019)	Tesla Model 3 (2019)
kulutus / 100 km	7,6 l	0,16 kwh/ km
diesel / sähkö hinta	diesel: 2,50 €/l	0,10 €/kwh (yöllä)
vero	746 €/vuosi (186 mg CO ₂)	190 €/vuosi
vuosihuolto	200 €	50 €

Malliratkaisu:

Lasketaan annuiteetin suurus, esimerkiksi Ti-Nspirellä:

Talouseläskentäohjelma

N: 60

I(%): 4.5

PV: 50000

Pmt: 932.15096207583

FV: 0.

PpY: 12

CpY: 12

PmtAt: LOPPU

Muokkaa maksuerää, Pmt

Lasketaan molemmille autoille kaikki kulut ja kustannukset:

Volvo XC-60, käytetty (2019)

annuiteetti: 932,15 €

maksettu korko yhteensä: $60 \cdot 932,15 - 50000 = 5929$ €

Diesel 7,6 l/100 km

Diesel hinta: 2,50 €/l

5 vuoden km: 50000 km

5 vuoden kulutus: $50000 \cdot 7,6/100 = 3800$ litra

5 vuoden kustannukset: $3800 \text{ l} \cdot 2,50 \text{ €/l} = 9500$ €

vero: 186 mgCO₂

Vero: 746 €/vuosi, 5 vuoden aikana : $746 \cdot 5 = 3730$ €

vuosihuolto: 200 €

5 v aikana huolto: $200 \cdot 5 = 1000$ €

Kaikki kulut ja kustannukset 5 vuoden aikana: $5929 + 9500 + 3730 + 1000 = 20159$ €

Tesla Model 3, käytetty (2019)

Sähkö: 0,16 kwh/km

sähkön kulutus 5v: $0,16 \cdot 10000 \cdot 5 = 8000$ kwh

Sähkön hinta: 0,10 €/kwh

5 vuoden kustannukset: $8000 \text{ kwh} \cdot 0,10 \text{ €/kwh} = 800$ €

Vuosihuolto: 50 €

huolto / 5v $50 \cdot 5 = 250$ €

Vero: 190 €/vuosi

5 vuoden vero: $190 \cdot 5 = 950$ €

kaikki kulut ja kustannukset 5 vuoden aikana: $5929 + 800 + 250 + 950 = 7929$ €

auton malli	Volvo XC-60 (2019)	Tesla Model 3 (2019)
annuiteetti	932,15 €	932,15 €
korko yhteensä	5 929 €	5 929 €
kulutus / 100 km	7,6 l	0,16 kwh/ km
kulutus / 5 vuotta	3800 l	8000 kwh
diesel / sähkö hinta	diesel: 2,50 €/l	0,10 €/kwh
diesel / sähkö kustannukset	9500 €	800 €
vero	746 €/vuosi (186 mg CO ₂)	190 €/vuosi
vero /5v	3730 €	950 €
vuosihuolto	200 €	50 €
vuosihuolto / 5v	1000 €	250 €
yhteensä	<u>20159 €</u>	<u>7929 €</u>

Vastaus: Laskujen mukaan Tesla Model 3 on edullisempi 5 vuoden aikana jos ajetaan noin 10000 km per vuosi.