# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

1. 11. 2022

*Tehtäviä on kahdella sivulla; ensimmäiset kuusi tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeaa vastausta.*

**1.** Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.
Benjamin: Minä en ole lyhyin.
Calle: Minä olen pisin.
Danny: Minä olen lyhyin.

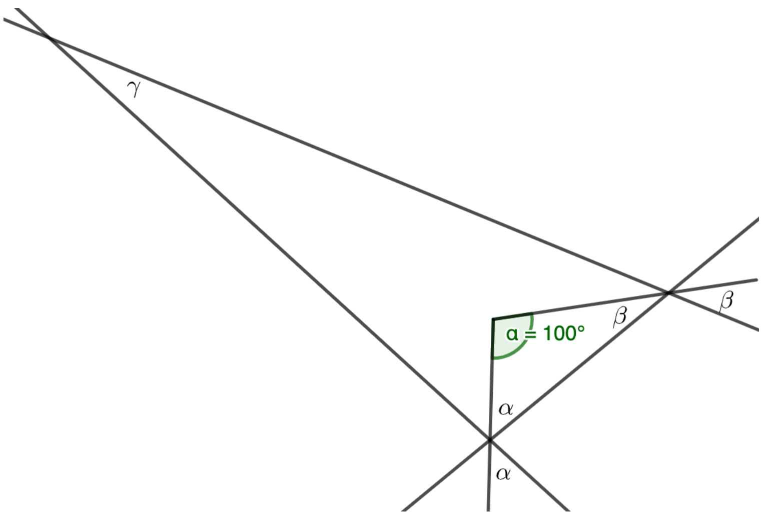
Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) Akseli | b) Benjamin | c) Calle | d) Danny |

**2.** Maapallon ympäri on vedetty naru päiväntasaajaa pitkin. Naru nostetaan joka kohdasta metrin korkeudelle maan pinnasta. Kuinka paljon enemmän narua nyt tarvitaan? (Maan säde olkoon 6370 km, ja oletamme sen olevan täydellinen pallo.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) alle 10 m | b) noin 75 km | c) noin 5 km | d) noin 390 km |

**3.** Oheisessa kuvassa kulmat $\alpha$ ja $\beta$ ovat annettuja. Määritä kulman $\gamma$ suuruus.

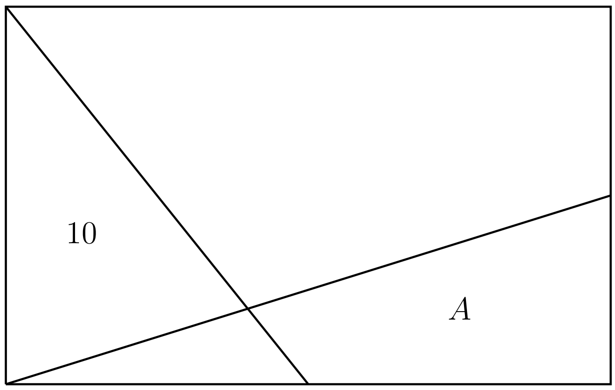



a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Riippuu kulmien $\alpha$ ja $\beta$ suuruudesta
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**4.** Rahasumma jaetaan neljään osaan. Ensimmäinen osa on 24 % rahasummasta ja samalla 75 % toisesta osasta sekä 80 % kolmannesta osasta. Tällöin neljäs osa on

| | |
|---|---|
| a) alle puolet suurimmasta osasta | b) yli puolet ensimmäisestä osasta |
| c) 14 % koko summasta | d) 12 % koko summasta |

**5.** Oheisessa kuviossa on suorakulmioon piirretty kaksi janaa, jotka kulkevat sivun keskipisteestä kulmaan. Näin muodostuu neljä aluetta. Vasemman reunan kolmion ala on 10. Oikean alanurkan nelikulmion ala on $A$. Määritä $A$.




| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 9 | b) 10 | c) 11 | d) 12 |

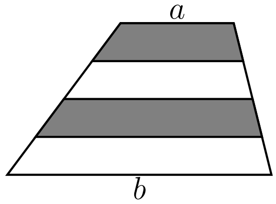
**6.** Olemme kiinnostuneita reaaliluvuista $x$, joille $x^2 + 4x - 44 > 0$ ja

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x - 44}\right)^{|x|-6} = 1.$$

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkaansa?

a) Luvut 6 ja $-6$ ovat tällaisia.
b) On olemassa ainakin neljä tällaista lukua.
c) On olemassa ainakin kolme tällaista lukua.
d) On olemassa ainakin kaksi tällaista lukua.

**7.** Puolisuunnikas, jonka kannoille $a$ ja $b$ pätee $a : b = 3 : 7$, pilkotaan kolmella kantojen suuntaisella suoralla neljäksi keskenään yhtä paksuksi viipaleeksi. Kaksi viipaleista varjostetaan kuten kuvassa. Kuinka suuri osa puolisuunnikkaan alasta on varjostettu?




**8.** Tarkastelemme niitä seitsennumeroisia positiivisia kokonaislukuja, joissa esiintyvät numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, kukin täsmälleen kerran. Näitä lukuja on tietenkin $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ erilaista. Järjestämme nämä aidosti kasvavaksi jonoksi lukuja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Mikä luku onkaan $a_{2022}$?

1. 11.

# Perussarjan monivalinnan vastauslomake

2022

*Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.*

*Työaikaa on 120 minuuttia.* **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

**Nimi :** ______________________________

**Koulu :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |
| 6. | | | | |

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

1. 11. 2022

*Tehtäviä on kahdella sivulla; ensimmäiset kolme tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeaa vastausta.*

**1.** Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.

Benjamin: Minä en ole lyhyin.

Calle: Minä olen pisin.

Danny: Minä olen lyhyin.

Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

a) Akseli b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** Rahasumma jaetaan neljään osaan. Ensimmäinen osa on 24 % rahasummasta ja samalla 75 % toisesta osasta sekä 80 % kolmannesta osasta. Tällöin neljäs osa on

a) alle puolet suurimmasta osasta
b) yli puolet ensimmäisestä osasta
c) 14 % koko summasta
d) 12 % koko summasta

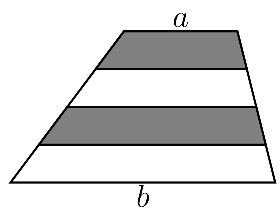
**3.** Reaalimuuttujan $x \neq 1$ yhtälölle

$$\frac{t^2 + 2x - 3t}{x - 1} = t,$$

missä $t$ on reaalivakio, pätee:

a) kun $t = 3$, yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu
b) on olemassa sellainen $t$, että löytyy ääretön määrä ratkaisuita
c) on olemassa sellainen $t$, että ei löydy yhtään ratkaisua
d) kaikilla $t$ löytyy yksikäsitteinen ratkaisu

**4.** Puolisuunnikas, jonka kannoille $a$ ja $b$ pätee $a : b = 3 : 7$, pilkotaan kolmella kantojen suuntaisella suoralla neljäksi keskenään yhtä paksuksi viipaleeksi. Kaksi viipaleista varjostetaan kuten kuvassa. Kuinka suuri osa puolisuunnikkaan alasta on varjostettu?




**5.** Erään yrityksen työntekijät haluaisivat ottaa ryhmävalokuvan kirkon portailla seisoen. Kirkon portaita on $n$ kappaletta, missä $n$ on positiivinen kokonaisluku.

Kun työntekijät yrittävät asettua portaille niin, että jokaisella kokonaisluvulla $i$, jolle $1 \leqslant i \leqslant n$, kirkon $i$. portaalle menisi seisomaan $2i - 1$ henkilöä, jää ylimmältä portaalta puuttumaan 50 henkilöä.

Sitten työntekijät valitsevat positiivisen kokonaisluvun $k$, jolle $k \leqslant n$, ja yrittävät asettua portaille niin, että $k$ alimmalle portaalle tulisi kullekin $k$ henkilöä, ja ylemmät portaat jäisivät tyhjiksi. Tällä tavalla jää 41 henkilöä yli.

Kuinka suuri on $n$?

**6.** Etsi kaikki reaalilukunelikot $(x, y, z, w)$, joille pätee

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

1. 11.

# Välisarjan monivalinnan vastauslomake

2022

*Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4, 5 ja 6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4, 5 ja 6 maksimipistemäärä on 6.*

*Työaikaa on 120 minuuttia.* **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4, 5 ja 6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

**Nimi :** ______________________

**Koulu :** ______________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

1. 11. 2022

*Tehtäviä on kahdella sivulla; ensimmäiset kaksi tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeaa vastausta.*

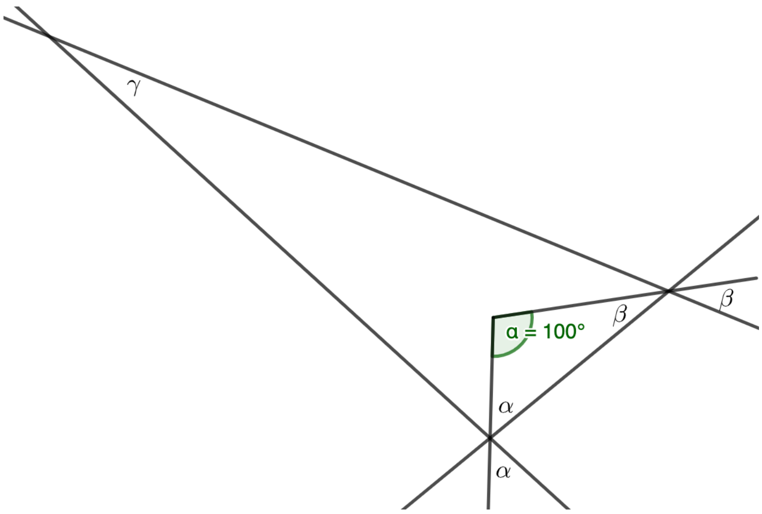
**1.** Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.
Benjamin: Minä en ole lyhyin.
Calle: Minä olen pisin.
Danny: Minä olen lyhyin.

Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

a) Akseli b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** Oheisessa kuvassa kulmat $\alpha$ ja $\beta$ ovat annettuja. Määritä kulman $\gamma$ suuruus.




a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Riippuu kulmien $\alpha$ ja $\beta$ suuruudesta
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**3.** Olkoot $n$ ja $k$ positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $n \geqslant 2$. Tarkastelemme aritmeettista reaalilukujen jonoa $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, jolle pätee $a_n = n^2$ ja $a_{n^2} = n^3$. Määritä summa

$$a_n + a_{n^2} + a_{n^3} + \ldots + a_{n^k}.$$

**4.** Tarkastelemme niitä seitsennumeroisia positiivisia kokonaislukuja, joissa esiintyvät numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, kukin täsmälleen kerran. Näitä lukuja on tietenkin $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ erilaista. Järjestämme nämä aidosti kasvavaksi jonoksi lukuja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Mikä luku onkaan $a_{2022}$?

**5.** Pallot $S_1$ ja $S_2$ leikkaavat toisensa siten, että pallon $S_2$ keskipiste on leikkausympyrän määräämässä tasossa. Pallon $S_1$ tilavuuden suhde pallon $S_2$ tilavuuteen on $125 : 27$. Määritä pallon $S_1$ ulkopuolelle jäävän pallon $S_2$ osan tilavuuden suhde pallon $S_2$ ulkopuolelle jäävän pallon $S_1$ osan tilavuuteen.

[Vihje: Kun $r$ on positiivinen reaaliluku, ja $h$ sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < h < 2r$, niin $r$-säteisen pallon segmentin, jonka korkeus on $h$, tilavuus on $\pi\, h^2\,(r - h/3)$.]

**6.** Etsi kaikki reaalilukunelikot $(x, y, z, w)$, joille pätee

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

1. 11.

# Avoimen sarjan monivalinnan vastauslomake

2022

*Avoimen sarjan monivalintatehtävien (2 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 3, 4, 5 ja 6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 3, 4, 5 ja 6 maksimipistemäärä on 6.*

*Työaikaa on 120 minuuttia.* **Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 3, 4, 5 ja 6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

**Nimi :** ______________________________

**Koulu :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |

# Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

1. 11. 2022

*Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.*

**1.** Bröderna Axel, Benjamin, Calle och Danny är alla olika långa. De påstår följande:

Axel: Jag är varken kortast eller längst.
Benjamin: Jag är inte kortast.
Calle: Jag är längst.
Danny: Jag är kortast.

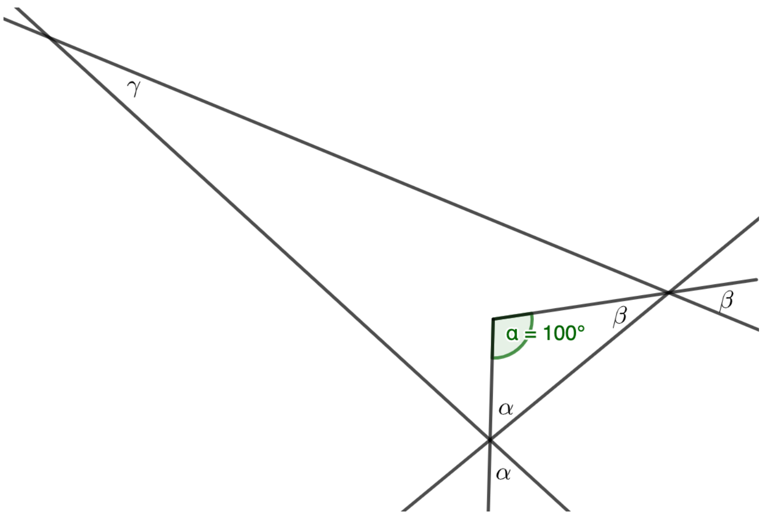
Exakt en av bröderna ljuger. Vem av dem är längst?

a) Axel b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** Man har dragit ett rep runt jorden längs ekvatorn. Repet lyfts vid varje ställe en meter ovanför jordytan. Hur mycket mera rep behöver man nu? (Jordens radie är 6370 km och vi antar att jorden är ett perfekt klot.)

a) mindre än 10 m b) ca 75 km c) ca 5 km d) ca 390 km

**3.** I följande figur är vinklarna $\alpha$ och $\beta$ givna. Bestäm storleken av vinkeln $\gamma$.

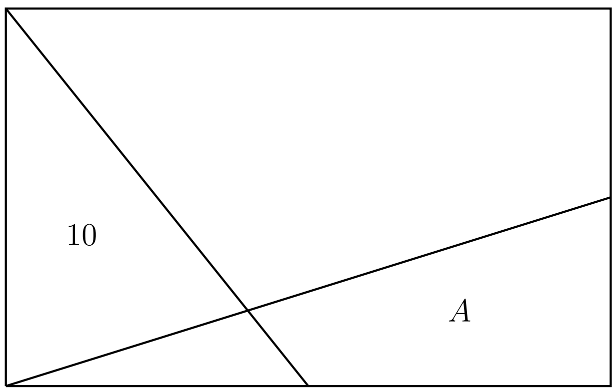



a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Beror av storleken av vinklarna $\alpha$ och $\beta$.
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**4.** En penningsumma delas i fyra delar. Den första delen utgör 24 % av penningsumman och samtidigt 75 % av den andra delen och 80 % av den tredje delen. Då är den fjärde delen

a) mindre än hälften av den största delen
b) över hälften av den första delen
c) 14 % av hela summan
d) 12 % av hela summan

**5.** I vidstående figur har man ritat in två sträckor i en rektangel så att sträckorna går från sidans mittpunkt till ett hörn. Då uppstår fyra områden. Arean av triangeln i vänstra kanten är 10. Arean av fyrhörningen i nedre högra hörnet är $A$. Bestäm $A$.




a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

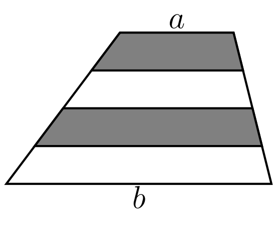
**6.** Vi studerar reella tal $x$ för vilka $x^2 + 4x - 44 > 0$ och

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x - 44}\right)^{|x|-6} = 1.$$

Vilka av följande påståenden stämmer?

a) Talen 6 och $-6$ är sådana tal.
b) Det finns åtminstone fyra sådana tal.
c) Det finns åtminstone tre sådana tal.
d) Det finns åtminstone två sådana tal.

**7.** För baserna $a$ och $b$ i ett trapets gäller att $a : b = 3 : 7$. Trapetset delas in i fyra sinsemellan lika tjocka skivor med hjälp av tre parallella linjer till baserna. Två av skivorna skuggas enligt bilden. Hur stor del av trapetset är skuggat?




**8.** Vi studerar sjusiffriga positiva heltal i vilka var och en av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7 förekommer exakt en gång. Det finns givetvis $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ olika sådana tal. Vi arrangerar dessa till en strängt växande följd av tal så att $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Vilket tal är då $a_{2022}$?

# Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

1.11.

2022

*Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett – om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.*

*Provtiden är 120 minuter.* **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

**Namn :** ________________________________

**Skola :** ________________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |
| 6. | | | | |

# Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

1. 11. 2022

*Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.*

**1.** Bröderna Axel, Benjamin, Calle och Danny är alla olika långa. De påstår följande:

Axel: Jag är varken kortast eller längst.
Benjamin: Jag är inte kortast.
Calle: Jag är längst.
Danny: Jag är kortast.

Exakt en av bröderna ljuger. Vem av dem är längst?

a) Axel b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** En penningsumma delas i fyra delar. Den första delen utgör 24 % av penningsumman och samtidigt 75 % av den andra delen och 80 % av den tredje delen. Då är den fjärde delen

a) mindre än hälften av den största delen
b) över hälften av den första delen
c) 14 % av hela summan
d) 12 % av hela summan

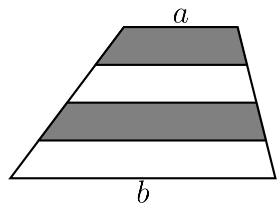
**3.** För den reella variabeln $x \neq 1$ i ekvationen

$$\frac{t^2 + 2x - 3t}{x - 1} = t,$$

där $t$ är en reell konstant gäller:

a) ekvationen har en entydig lösning när $t = 3$
b) det existerar ett sådant $t$ att det hittas oändligt många lösningar
c) det existerar ett sådant $t$ att det inte hittas en enda lösning
d) för alla $t$ hittas en entydig lösning

**4.** För baserna $a$ och $b$ i ett trapets gäller att $a : b = 3 : 7$. Trapetset delas in i fyra sinsemellan lika tjocka skivor med hjälp av tre parallella linjer till baserna. Två av skivorna skuggas enligt bilden. Hur stor del av trapetset är skuggat?




**5.** Arbetstagarna i ett företag ska ställa upp sig på en kyrktrappa för gruppfotografering. Antalet trappsteg i kyrktrappan är $n$ där $n$ är ett positivt heltal.

När arbetstagarna försöker ställa sig så att det för varje heltal $i$, där $1 \leqslant i \leqslant n$, står $2i - 1$ personer på trappsteg $i$ saknas 50 personer på det översta trappsteget.

Sedan väljer arbetstagarna ett positivt heltal $k$, för vilket $k \leqslant n$, och försöker ställa sig på trappan så att det blir $k$ personer per trappsteg på de $k$ nedersta trappstegen och att de övriga trappstegen blir tomma. På detta sätt blir det 41 personer över.

Hur stort är $n$?

**6.** Bestäm alla talkvartetter av reella tal $(x, y, z, w)$ för vilka gäller att

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

1. 11.

# Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2022

*Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervals-uppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett – om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.*

*Provtiden är 120 minuter.* **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

**Namn :** ______________________________

**Skola :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |

1. 11. Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie 2022

*Det finns uppgifter på två sidor; de två första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.*

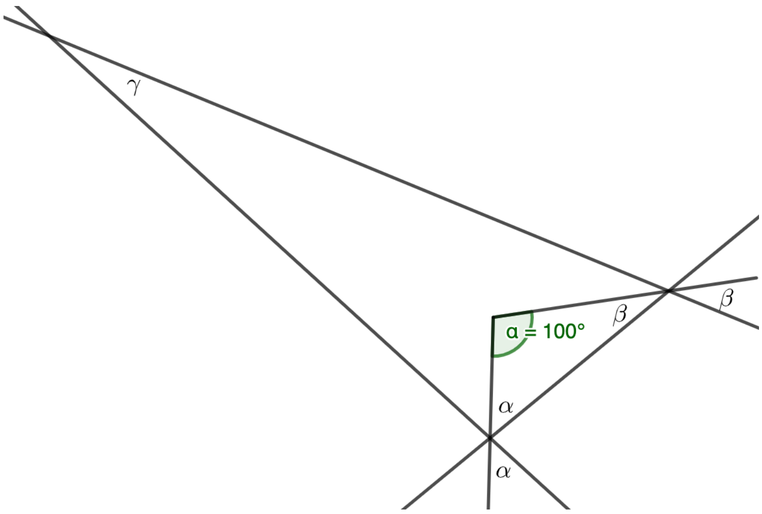
**1.** Bröderna Axel, Benjamin, Calle och Danny är alla olika långa. De påstår följande:

Axel: Jag är varken kortast eller längst.
Benjamin: Jag är inte kortast.
Calle: Jag är längst.
Danny: Jag är kortast.

Exakt en av bröderna ljuger. Vem av dem är längst?

a) Axel b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** I följande figur är vinklarna $\alpha$ och $\beta$ givna. Bestäm storleken av vinkeln $\gamma$.




a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Beror av storleken av vinklarna $\alpha$ och $\beta$.
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**3.** Låt $n$ och $k$ vara positiva heltal och låt $n \geqslant 2$. Vi studerar en aritmetisk talföljd av reella tal $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ för vilken gäller att $a_n = n^2$ och $a_{n^2} = n^3$. Bestäm summan

$$a_n + a_{n^2} + a_{n^3} + \ldots + a_{n^k}.$$

**4.** Vi studerar sjusiffriga positiva heltal i vilka var och en av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7 förekommer exakt en gång. Det finns givetvis $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ olika sådana tal. Vi arrangerar dessa till en strängt växande följd av tal så att $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Vilket tal är då $a_{2022}$?

**5.** Kloten $S_1$ och $S_2$ skär varandra så att medelpunkten för klotet $S_2$ finns i det plan som bestäms av skärningscirkeln. Förhållandet mellan volymen av klotet $S_1$ och volymen av klotet $S_2$ är $125 : 27$. Bestäm förhållandet mellan volymen av den del av klotet $S_2$ som är utanför klotet $S_1$ och den del av volymen av klotet $S_1$ som är utanför klotet $S_2$.

[Tips: När $r$ är ett positivt reellt tal och $h$ är ett sådant positivt reellt tal att $0 < h < 2r$ så är volymen av ett segment av ett klot med radien $r$ och höjden $h$ lika med $\pi\, h^2\, (r - h/3)$.]

**6.** Bestäm alla talkvartetter av reella tal $(x, y, z, w)$ för vilka gäller att

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

# Svarsblankett för flervals-uppgifterna i öppna serien

1. 11. 2022

*Öppna seriens flervalsuppgifter (de 2 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 3–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett – om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 3–6 är 6p.*

*Provtiden är 120 minuter.* **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 3–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

**Namn :** ______________________________

**Skola :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |

1. 11.

# High School Mathematics Competition
# First Round, Basic Level

2022

*There are problems on two pages; the first six problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.*

**1.** The brothers Akseli, Benjamin, Calle and Danny all have different heights. They declare:

Akseli: I am neither the shortest nor the tallest.
Benjamin: I am not the shortest.
Calle: I am the tallest.
Danny: I am the shortest.

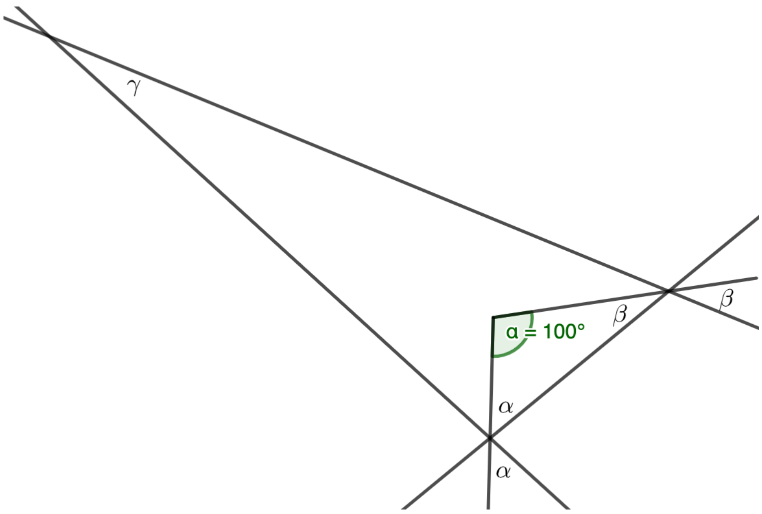
Exactly one of the brothers lies. Who is the tallest?

a) Akseli b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** A rope is first laid along Earth's equator. Then the rope is lifted one meter above each point of the Equator. How much more rope is needed now? (We suppose that the radius of Earth is 6370 km, and we assume that it is a perfect sphere.)

a) less than 10 m b) approximately 75 km
c) approximately 5 km d) approximately 390 km

**3.** In the following picture, the angles $\alpha$ and $\beta$ are given. Determine the size of the angle $\gamma$.

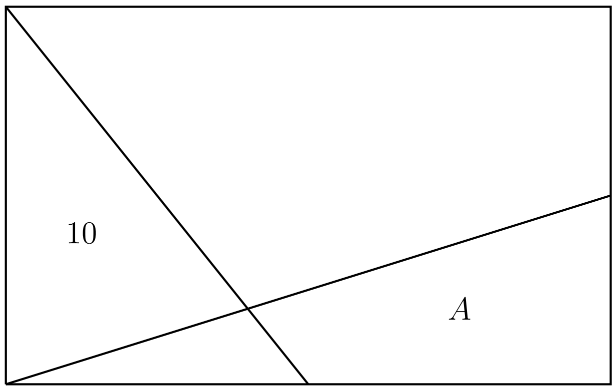



a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Depends on the sizes of the angles $\alpha$ and $\beta$
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**4.** An amount of money is divided into four parts. The first part is 24 % of the entire amount and simultaneously 75 % of the second part as well as 80 % of the third part. Then the fourth part is

| | |
|---|---|
| a) less than half of the largest part | b) more than half of the first part |
| c) 14 % of the entire amount | d) 12 % of the entire amount |

**5.** In the figure below two segments have been drawn in a rectangle to connect a corner to a midpoint of a side. This gives rise to four areas. The area of the triangle on the left is 10. The area of the quadrilateral on the bottom right corner is $A$. Determine $A$.




| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 9 | b) 10 | c) 11 | d) 12 |

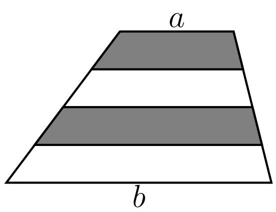
**6.** We are interested in real numbers $x$, for which $x^2 + 4x - 44 > 0$ and

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x - 44}\right)^{|x|-6} = 1.$$

Which of the following statements are true?

a) The numbers 6 and −6 are such numbers.
b) There are at least four such numbers.
c) There are at least three such numbers.
d) There are at least two such numbers.

**7.** A trapezoid has bases $a$ and $b$ for which $a : b = 3 : 7$. Three lines parallel to the bases split the trapezoid into four slices of equal thicknesses. Two of the slices have been shaded as in the figure. How large a proportion of the area of the trapezoid has been shaded?




**8.** We study those seven-digit positive integers in which the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 and 7 each appear exactly once. Of course, there are $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ such numbers. We order these numbers into an increasing sequence $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Which number is $a_{2022}$?

1. 11.

# Basic Level Multiple Choice Answer Sheet

2022

*The first six problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a "+" to the appropriate square if the answer is right, and a "–" if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 7 and 8 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.*

*The time allowed is 120 minutes.* **The use of calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

**Name :** ________________________________

**School :** ________________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |
| 4. | | | | |
| 5. | | | | |
| 6. | | | | |

# High School Mathematics Competition
# First Round, Intermediate Level

1. 11. 2022

*There are problems on two pages; the first three problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.*

**1.** The brothers Akseli, Benjamin, Calle and Danny all have different heights. They declare:

Akseli: I am neither the shortest nor the tallest.

Benjamin: I am not the shortest.

Calle: I am the tallest.

Danny: I am the shortest.

Exactly one of the brothers lies. Who is the tallest?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) Akseli | b) Benjamin | c) Calle | d) Danny |

**2.** An amount of money is divided into four parts. The first part is $24\,\%$ of the entire amount and simultaneously $75\,\%$ of the second part as well as $80\,\%$ of the third part. Then the fourth part is

| | |
|---|---|
| a) less than half of the largest part | b) more than half of the first part |
| c) $14\,\%$ of the entire amount | d) $12\,\%$ of the entire amount |

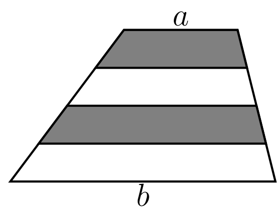
**3.** Which is of the following statements are true for the equation

$$\frac{t^2 + 2x - 3t}{x - 1} = t$$

for a real variable $x \neq 1$, where $t$ is a real constant?

a) When $t = 3$, the equation has a unique solution.
b) There exists a $t$ such that there are infinitely many solutions.
c) There exists a $t$ such that there are no solutions.
d) For every $t$ there is a unique solution.

**4.** A trapezoid has bases $a$ and $b$ for which $a : b = 3 : 7$. Three lines parallel to the bases split the trapezoid into four slices of equal thicknesses. Two of the slices have been shaded as in the figure. How large a proportion of the area of the trapezoid has been shaded?




**5.** The employees of a company wish to take a group photograph standing on the steps in front of a church. There are $n$ steps, where $n$ is a positive integer.

When the employees try to arrange themselves on the steps so that for each integer $i$ with $1 \leqslant i \leqslant n$ there would be $2i - 1$ people on the $i$th step, the topmost step will be short 50 people.

Then the employees choose a positive integer $k$, for which $k \leqslant n$, and attempt to arrange themselves on the step so that there would be $k$ people on each of the $k$ lowest steps, and that the upper steps would be empty. This way 41 people are left over.

How large is $n$?

**6.** Find all quadruples $(x, y, z, w)$ of real numbers for which

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

1. 11.

# Intermediate Level Multiple Choice Answer Sheet

2022

*The first three problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a + to the appropriate square, if the answer is right and a – if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 4 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.*

*The time allowed is 120 minutes.* **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

**Name :** ______________________________

**School :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |
| 3. | | | | |

1. 11.

# High School Mathematics Competition
# First Round, Open Level

2022

*There are problems on two pages; the first two problems are multiple choice problems with zero to four correct answers.*

**1.** The brothers Akseli, Benjamin, Calle and Danny all have different heights. They declare:

Akseli: I am neither the shortest nor the tallest.

Benjamin: I am not the shortest.

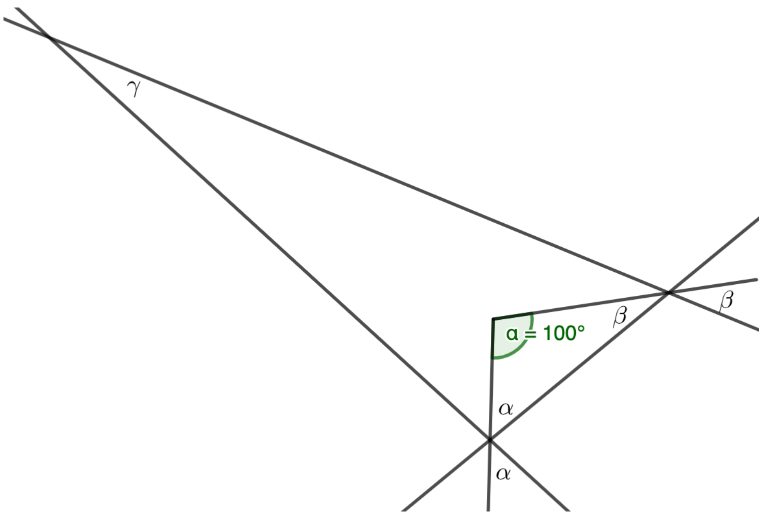
Calle: I am the tallest.

Danny: I am the shortest.

Exactly one of the brothers lies. Who is the tallest?

a) Akseli b) Benjamin c) Calle d) Danny

**2.** In the following picture, the angles $\alpha$ and $\beta$ are given. Determine the size of the angle $\gamma$.




a) $20°$
b) $180° - \alpha - \beta$
c) Depends on the sizes of the angles $\alpha$ and $\beta$
d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

**3.** Let $n$ and $k$ be positive integers, and suppose that $n \geqslant 2$. We consider an arithmetic sequence of real numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ for which $a_n = n^2$ and $a_{n^2} = n^3$. Determine the sum

$$a_n + a_{n^2} + a_{n^3} + \ldots + a_{n^k}.$$

**4.** We study those seven-digit positive integers in which the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 and 7 each appear exactly once. Of course, there are $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ such numbers. We order these numbers into an increasing sequence $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Which number is $a_{2022}$?

**5.** Two spheres $S_1$ and $S_2$ intersect each other so that the center of $S_2$ is in the plane of the circle of intersection. The ratio of the volumes of $S_1$ and $S_2$ is $125 : 27$. Determine the ratio of the volume of $S_2$ outside of $S_1$ to the volume of $S_1$ outside of $S_2$.

[Hint: When $r$ is a positive real number, and $h$ a real number such that $0 < h < 2r$, the volume of a segment of a ball of radius $r$ with height $h$ is $\pi\, h^2\, (r - h/3)$.]

**6.** Find all quadruples $(x, y, z, w)$ of real numbers for which

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

1. 11.

# Open Level Multiple Choice Answer Sheet

2022

*The first two problems are multiple choice problems. Their answers should be written in the table below. Each multiple choice problem has 0 to 4 correct answers. Put a + to the appropriate square, if the answer is right and a – if the answer is wrong. All correct marks give one point and incorrect or unintelligible marks give zero points. The answers to problems 3 to 6 can be written on a separate paper. For each of these problems, a maximum of 6 points is given.*

*The time allowed is 120 minutes.* **Calculators and tables are not allowed.** *Please write your name and school with block letters on every paper you return.*

**Name :** ______________________________

**School :** ______________________________

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | |
| 2. | | | | |