Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja
Ratkaisuita

Ongelma 1. Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

> Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.
>
> Benjamin: Minä en ole lyhyin.
>
> Calle: Minä olen pisin.
>
> Danny: Minä olen lyhyin.

Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

a) Akseli

b) Benjamin

c) Calle

d) Danny

Ratkaisu. Jos Akseli valehtelee, niin Calle tai Danny valehtelee. Jos Benjamin valehtelee, niin myös Danny valehtelee. Jos Danny valehtelee, niin myös joku muu valehtelee. Koska vain yksi veljeksistä valehtelee, niin valehtelija on Calle. Koska Akseli ja Danny puhuvat totta ja Calle valehtelee, niin kukaan heistä ei ole pisin. Siksi Benjaminin on oltava pisin.

Ongelma 2. Maapallon ympäri on vedetty naru päiväntasaajaa pitkin. Naru nostetaan joka kohdasta metrin korkeudelle maan pinnasta. Kuinka paljon enemmän narua nyt tarvitaan? (Maan säde olkoon 6370 km, ja oletamme sen olevan täydellinen pallo.)

a) alle 10 m

b) noin 75 km

c) noin 5 km

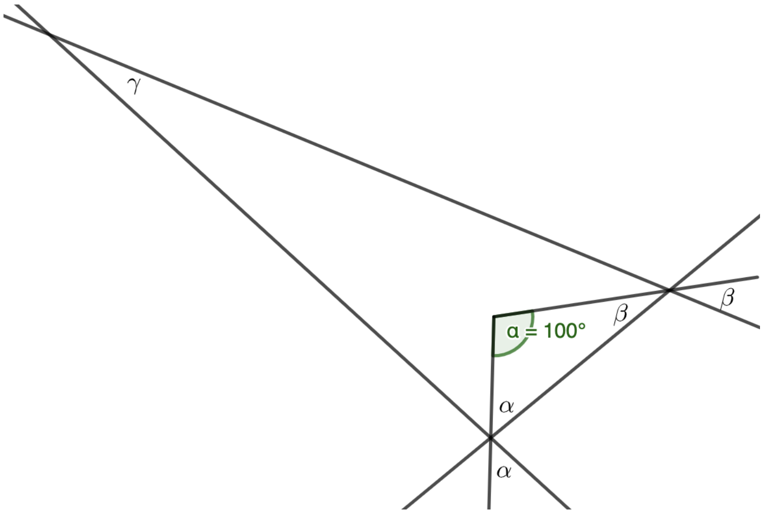
d) noin 390 km

Ratkaisu. Jos maapallon säde metreissä on R, niin päiväntasaajan pituus metreissä on $2\pi R$. Kun naru nostetaan metrin korkeudelle, on uusi narun pituus $2\pi\,(R+1)$. Näiden erotus on

$$2\pi\,(R+1) - 2\pi R = 2\pi < 2 \cdot 4 < 10.$$

Siten ainoa oikea vastausvaihtoehto on a).

Ongelma 3. Oheisessa kuvassa kulmat α ja β ovat annettuja. Määritä kulman γ suuruus.



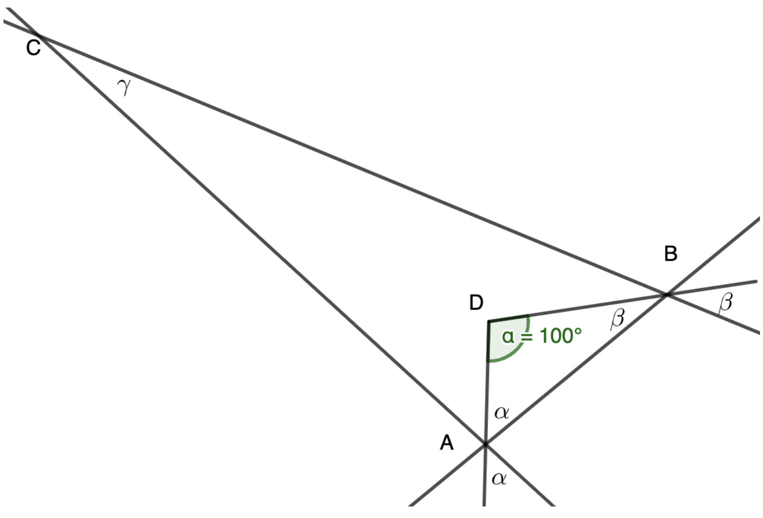
a) $20°$

b) $180° - \alpha - \beta$

c) Riippuu kulmien α ja β suuruudesta

d) $180° - 2\alpha - 2\beta$

Ratkaisu. Nimetään pisteet oheisen kuvan mukaan:



Nyt ristikulmien perusteella $\angle CAD = \alpha$ ja $\angle DBC = \beta$. Koska kolmion kulmien summa on $180°$, on

$$\gamma = 180° - 2\alpha - 2\beta,$$

joten viimeinen väite on tosi. Toisaalta, koska

$$\alpha + \beta = 180° - 100° = 80°,$$

niin

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ,$$

joten myös ensimmäinen väite on tosi. Selvästi toinen ja kolmas väite eivät ole tosia.

Ongelma 4. Rahasumma jaetaan neljään osaan. Ensimmäinen osa on 24 % rahasummasta ja samalla 75 % toisesta osasta sekä 80 % kolmannesta osasta. Tällöin neljäs osa on

a) alle puolet suurimmasta osasta

b) yli puolet ensimmäisestä osasta

c) 14 % koko summasta

d) 12 % koko summasta

Ratkaisu. Merkitkäämme alkuperäistä rahasummaa R, jolloin ensimmäinen osa a on

$$a = 0{,}24 \cdot R = \frac{12\,R}{50}.$$

Toiselle osalle b on

$$0{,}24 \cdot R = 0{,}75 \cdot b, \qquad \text{eli} \qquad b = \frac{24}{75}\,R = \frac{16\,R}{50}.$$

Samoin kolmannelle osalle c on

$$0{,}24 \cdot R = 0{,}8 \cdot c, \qquad \text{eli} \qquad c = \frac{24}{80}\,R = \frac{15\,R}{50}.$$

Nyt voimme laskea neljännen osan d:

$$d = R - a - b - c = R - \frac{12\,R}{50} - \frac{16\,R}{50} - \frac{15\,R}{50} = \frac{7R}{50}.$$

Koska suurin osista on b, ja koska

$$d = \frac{7R}{50} < \frac{8R}{50} = \frac{b}{2},$$

on väite a) tosi. Samoin, koska

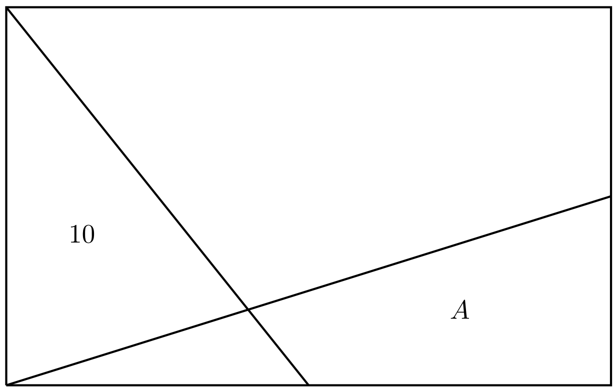
$$d = \frac{7R}{50} > \frac{6R}{50} = \frac{a}{2},$$

on väite b) myös tosi. Edelleen, koska

$$d = \frac{7R}{50} = \frac{14\,R}{100} = 14\,\% \cdot R,$$

on myös väite c) tosi. Lopuksi, koska väitteet c) ja d) eivät voi pitää paikkaansa samaan aikaan, on väitteen d) oltava väärä.

Ongelma 5. Oheisessa kuviossa on suorakulmioon piirretty kaksi janaa, jotka kulkevat sivun keskipisteestä kulmaan. Näin muodostuu neljä aluetta. Vasemman reunan kolmion ala on 10. Oikean alanurkan nelikulmion ala on A. Määritä A.



a) 9

b) 10

c) 11

d) 12

Ratkaisu. Koska sivujen keskipisteistä kärkiin piirretyt janat erottavat kolmiot, joista kummankin ala on neljäsosa koko suorakulmion alasta ja näiden kolmioiden yhteinen alue erottaa alat, joiden koot ovat 10 ja A, on oltava $A = 10$.

Ongelma 6. Olemme kiinnostuneita reaaliluvuista x, joille $x^2 + 4x - 44 > 0$ ja

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x - 44}\right)^{|x|-6} = 1.$$

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkaansa?

a) Luvut 6 ja -6 ovat tällaisia.

b) On olemassa ainakin neljä tällaista lukua.

c) On olemassa ainakin kolme tällaista lukua.

d) On olemassa ainakin kaksi tällaista lukua.

Ratkaisu. Tarkastelkaamme ensin määrittelyehtoa. Epäyhtälö

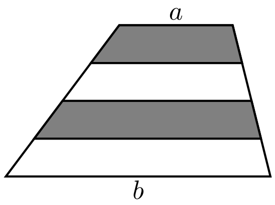
$$x^2 + 4x - 44 > 0$$

pätee täsmälleen niille reaaliluvuille, joille pätee joko $x > 4\sqrt{3} - 2 \approx 4{,}9$ tai $x < -4\sqrt{3} - 2 \approx -8{,}9$. Erityisesti luku -6 ei toteuta kumpaakaan näistä, joten väite a) on väärin.

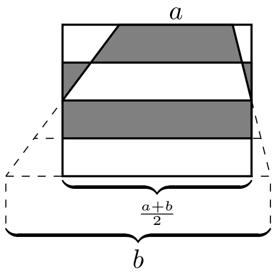
Yhtälö pätee, jos $x^2 + 4x - 44 = 1$. Tämän yhtälön ratkaisut ovat $x = -9$ ja $x = 5$. Molemmat kuuluvat yllä mainituille väleille, joten meillä on ainakin kaksi ratkaisua, ja väite d) on tosi.

Jos sitten $x^2 + 4x - 44 \neq 1$, niin yhtälö pätee vain ja ainoastaan silloin, kun eksponentille pätee $|x| - 6 = 0$, eli kun $x = +6$ tai -6. Näistä -6 todettiin jo sopimattomaksi arvoksi, kun taas $x = +6$ on kelvollinen. Siten yhtälöllä on täsmälleen kolme ratkaisua, joten väite c) on oikein, ja väite b) väärin.

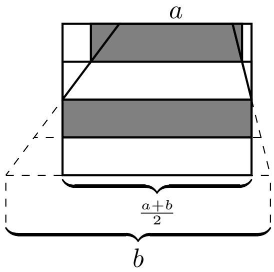
Ongelma 7. Puolisuunnikas, jonka kannoille a ja b pätee $a : b = 3 : 7$, pilkotaan kolmella kantojen suuntaisella suoralla neljäksi keskenään yhtä paksuksi viipaleeksi. Kaksi viipaleista varjostetaan kuten kuvassa. Kuinka suuri osa puolisuunnikkaan alasta on varjostettu?



Ratkaisu. Voimme ensin muokata kuviosta suorakaiteen:



Sitten voimme vielä yksinkertaistaa ylemmän puolikkaan harmaita osia suorakaiteeksi:



Ylemmän harmaan suorakaiteen leveys on lukujen a ja $(a+b)/2$ keskiarvo, eli

$$\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4}.$$

Siispä kysytty harmaa osuus kuvion pinta-alasta on

$$\frac{3a+b}{4} \cdot \frac{2}{a+b} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3a+b}{8(a+b)} + \frac{1}{4}.$$

Supistamalla tässä tekijällä a voimme jatkaa

$$= \frac{3+\frac{b}{a}}{8\left(1+\frac{b}{a}\right)} + \frac{1}{4} = \frac{3+\frac{7}{3}}{8\left(1+\frac{7}{3}\right)} + \frac{1}{4} = \frac{\left(\frac{16}{3}\right)}{8\cdot\frac{10}{3}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}.$$

Ratkaisu 2. Kantojen suuntaisten viiden janan pituudet ovat luonnollisesti a, $(3a+b)/4$, $(a+b)/2$, $(a+3b)/4$ ja b. Siispä harmaan osan ala on

$$
\begin{aligned}
&\frac{h}{4}\cdot\frac{a+\frac{3a+b}{4}}{2}+\frac{h}{4}\cdot\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+3b}{4}}{2} \\
&\qquad =\frac{h}{8}\left(a+\frac{3a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{4}+\frac{3b}{4}\right)=\frac{h}{8}\left(\frac{5a}{2}+\frac{3b}{2}\right),
\end{aligned}
$$

missä h on koko puolisuunnikkaan korkeus kun taas koko puolisuunnikkaan ala on

$$h\cdot\frac{a+b}{2}.$$

Näiden suhde on

$$\frac{\frac{h}{8}\cdot\frac{5a+3b}{2}}{h\cdot\frac{a+b}{2}}=\frac{5a+3b}{8\,(a+b)}=\frac{5+3\cdot\frac{b}{a}}{8\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{5+3\cdot\frac{7}{3}}{8\left(1+\frac{7}{3}\right)}=\frac{9}{20}.$$

Ongelma 8. Tarkastelemme niitä seitsennumeroisia positiivisia kokonaislukuja, joissa esiintyvät numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, kukin täsmälleen kerran. Näitä lukuja on tietenkin $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ erilaista. Järjestämme nämä aidosti kasvavaksi jonoksi lukuja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Mikä luku onkaan a_{2022}?

Ratkaisu. Numerolla 1 alkavia lukuja on luonnollisesti $6! = 720$ kappaletta. Numerolla 2 alkavia lukuja on niin ikään 720 kappaletta, samoin numerolla 3 alkavia lukuja. Koska $2 \cdot 720 = 1440 < 2022 < 2160 = 3 \cdot 720$, on luvun a_{2022} alettava numerolla 3, ja itse asiassa, koska $2022 - 720 - 720 = 582$, kyseessä on suuruusjärjestyksessä 582. numerolla 3 alkava luku listassa.

Numeroilla 3 ja 1 alkavia lukuja on tietenkin $5! = 120$ kappaletta. Samoin numeroilla 3 ja 2 alkavia, jne. Koska $4 \cdot 120 = 480 < 582 < 600 = 5 \cdot 120$, on luvun a_{2022} toisen numeron oltava listan 1, 2, 4, 5, 6, 7 viides numero, eli 6. Luku a_{2022} alkaa siis numeroilla 36, ja koska $582 - 480 = 102$, kyseessä on listan 102. näillä kahdella numerolla alkava luku.

Koska numeroilla 36 alkavia lukuja on 120, ja koska viimeiset viisi numeroa ovat 1, 2, 4, 5 ja 7, ja koska nyt kysytty luku on itse asiassa 19. suurin näistä, voimme selvittää luvun yksinkertaisesti kirjoittamalla numeroilla 36 alkavia listan lukuja laskevassa järjestyksessä:

$$\begin{aligned}&3675421,\ 3675412,\ 3675241,\ 3675214,\ 3675142,\ 3675124,\\ &3674521,\ 3674512,\ 3674251,\ 3674215,\ 3674152,\ 3674125,\\ &3672541,\ 3672514,\ 3672451,\ 3672415,\ 3672154,\ 3672145,\\ &3671542,\ \ldots\end{aligned}$$

Siten kysytty luku a_{2022} on 3671542.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja
Ratkaisuita

Ongelma 1. Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

> Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.
>
> Benjamin: Minä en ole lyhyin.
>
> Calle: Minä olen pisin.
>
> Danny: Minä olen lyhyin.

Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

a) Akseli

b) Benjamin

c) Calle

d) Danny

Ratkaisu. Jos Akseli valehtelee, niin Calle tai Danny valehtelee. Jos Benjamin valehtelee, niin myös Danny valehtelee. Jos Danny valehtelee, niin myös joku muu valehtelee. Koska vain yksi veljeksistä valehtelee, niin valehtelija on Calle. Koska Akseli ja Danny puhuvat totta ja Calle valehtelee, niin kukaan heistä ei ole pisin. Siksi Benjaminin on oltava pisin.

Ongelma 2. Rahasumma jaetaan neljään osaan. Ensimmäinen osa on 24 % rahasummasta ja samalla 75 % toisesta osasta sekä 80 % kolmannesta osasta. Tällöin neljäs osa on

a) alle puolet suurimmasta osasta

b) yli puolet ensimmäisestä osasta

c) 14 % koko summasta

d) 12 % koko summasta

Ratkaisu. Merkitkäämme alkuperäistä rahasummaa R, jolloin ensimmäinen osa a on

$$a = 0{,}24 \cdot R = \frac{12\,R}{50}.$$

Toiselle osalle b on

$$0{,}24 \cdot R = 0{,}75 \cdot b, \qquad \text{eli} \qquad b = \frac{24}{75}\,R = \frac{16\,R}{50}.$$

Samoin kolmannelle osalle c on

$$0{,}24 \cdot R = 0{,}8 \cdot c, \qquad \text{eli} \qquad c = \frac{24}{80}\,R = \frac{15\,R}{50}.$$

Nyt voimme laskea neljännen osan d:

$$d = R - a - b - c = R - \frac{12\,R}{50} - \frac{16\,R}{50} - \frac{15\,R}{50} = \frac{7R}{50}.$$

Koska suurin osista on b, ja koska

$$d = \frac{7R}{50} < \frac{8R}{50} = \frac{b}{2},$$

on väite a) tosi. Samoin, koska

$$d = \frac{7R}{50} > \frac{6R}{50} = \frac{a}{2},$$

on väite b) myös tosi. Edelleen, koska

$$d = \frac{7R}{50} = \frac{14\,R}{100} = 14\,\% \cdot R,$$

on myös väite c) tosi. Lopuksi, koska väitteet c) ja d) eivät voi pitää paikkaansa samaan aikaan, on väitteen d) oltava väärä.

Ongelma 3. Reaalimuuttujan $x \neq 1$ yhtälölle

$$\frac{t^2 + 2x - 3t}{x - 1} = t,$$

missä t on reaalivakio, pätee:

a) kun $t = 3$, yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu

b) on olemassa sellainen t, että löytyy ääretön määrä ratkaisuita

c) on olemassa sellainen t, että ei löydy yhtään ratkaisua

d) kaikilla t löytyy yksikäsitteinen ratkaisu

Ratkaisu. Kertomalla puolittain nimittäjällä $x-1$ yhtälö muttuu ensin muotoon

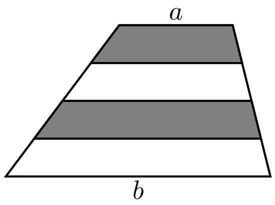
$$t^2 + 2x - 3t = tx - t,$$

ja sitten pienellä sievennyksellä muotoon

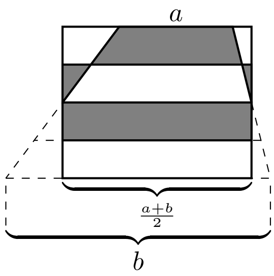
$$(t-2)(t-x) = 0.$$

Kun $t = 2$, yhtälö pätee kaikilla reaaliluvuilla $x \neq 1$, joten väite b) on tosi. Kun $t \neq 2$ ja $t \neq 1$, on yhtälöllä täsmälleen yksi ratkaisu $x = t$. Erityisesti on väite a) tosi. Kun $t = 1$, ei yhtälöllä ole ainoatakaan ratkaisua, joten väite c) on tosi. Lopuksi, koska väitteet c) ja d) eivät voi päteä samaan aikaan, on väitteen d) oltava virheellinen.

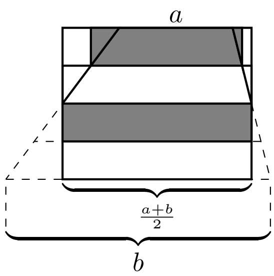
Ongelma 4. Puolisuunnikas, jonka kannoille a ja b pätee $a : b = 3 : 7$, pilkotaan kolmella kantojen suuntaisella suoralla neljäksi keskenään yhtä paksuksi viipaleeksi. Kaksi viipaleista varjostetaan kuten kuvassa. Kuinka suuri osa puolisuunnikkaan alasta on varjostettu?



Ratkaisu. Voimme ensin muokata kuviosta suorakaiteen:



Sitten voimme vielä yksinkertaistaa ylemmän puolikkaan harmaita osia suorakaiteeksi:



Ylemmän harmaan suorakaiteen leveys on lukujen a ja $(a+b)/2$ keskiarvo, eli

$$\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4}.$$

Siispä kysytty harmaa osuus kuvion pinta-alasta on

$$\frac{3a+b}{4} \cdot \frac{2}{a+b} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3a+b}{8\,(a+b)} + \frac{1}{4}.$$

Supistamalla tässä tekijällä a voimme jatkaa

$$= \frac{3 + \frac{b}{a}}{8\left(1 + \frac{b}{a}\right)} + \frac{1}{4} = \frac{3 + \frac{7}{3}}{8\left(1 + \frac{7}{3}\right)} + \frac{1}{4} = \frac{\left(\frac{16}{3}\right)}{8 \cdot \frac{10}{3}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}.$$

Ratkaisu 2. Kantojen suuntaisten viiden janan pituudet ovat luonnollisesti a, $(3a+b)/4$, $(a+b)/2$, $(a+3b)/4$ ja b. Siispä harmaan osan ala on

$$\begin{aligned}\frac{h}{4}\cdot\frac{a+\frac{3a+b}{4}}{2}+\frac{h}{4}\cdot\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+3b}{4}}{2}& \\ =\frac{h}{8}\left(a+\frac{3a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{4}+\frac{3b}{4}\right)&=\frac{h}{8}\left(\frac{5a}{2}+\frac{3b}{2}\right),\end{aligned}$$

missä h on koko puolisuunnikkaan korkeus kun taas koko puolisuunnikkaan ala on

$$h\cdot\frac{a+b}{2}.$$

Näiden suhde on

$$\frac{\frac{h}{8}\cdot\dfrac{5a+3b}{2}}{h\cdot\dfrac{a+b}{2}}=\frac{5a+3b}{8\,(a+b)}=\frac{5+3\cdot\frac{b}{a}}{8\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{5+3\cdot\frac{7}{3}}{8\left(1+\frac{7}{3}\right)}=\frac{9}{20}.$$

Ongelma 5. Erään yrityksen työntekijät haluaisivat ottaa ryhmävalokuvan kirkon portailla seisoen. Kirkon portaita on n kappaletta, missä n on positiivinen kokonaisluku.

Kun työntekijät yrittävät asettua portaille niin, että jokaisella kokonaisluvulla i, jolle $1 \leqslant i \leqslant n$, kirkon i. portaalle menisi seisomaan $2i - 1$ henkilöä, jää ylimmältä portaalta puuttumaan 50 henkilöä.

Sitten työntekijät valitsevat positiivisen kokonaisluvun k, jolle $k \leqslant n$, ja yrittävät asettua portaille niin, että k alimmalle portaalle tulisi kullekin k henkilöä, ja ylemmät portaat jäisivät tyhjiksi. Tällä tavalla jää 41 henkilöä yli.

Kuinka suuri on n?

Ratkaisu. Ensimmäisessä skenaariossa portaille yritetään saada

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

henkilöä. Koska viimeiseltä portaalta jää puuttumaan 50 henkilöä, on työntekijöiden lukumäärä $m = n^2 - 50$. Toisessa skenaariossa portailla pitäisi seisoa k^2 henkilöä, joten $m = k^2 + 41$. Voimme päätellä, että

$$n^2 - 50 = m = k^2 + 41,$$

eli

$$n^2 - k^2 = 91.$$

Nyt on

$$(n - k)(n + k) = 91 = 7 \cdot 13.$$

Koska $(n - k) \mid 7 \cdot 13$, on $n - k$ jokin luvuista 1, 7, 13 ja 91. Jos se olisi 13 tai 91, olisi $n + k$ vastaavasti 7 tai 1, vastoin sitä, että $n - k < n + k$. Jos olisi $n - k = 7$, olisi $n + k = 13$, jolloin olisi

$$2n - 1 = (n - k) + (n + k) - 1 = 7 + 13 - 1 = 19.$$

Mutta tämä on vastoin sitä, että $2n - 1 \geqslant 50$. Siten voi olla vain ja ainoastaan $n - k = 1$, ja $n + k = 91$, jolloin $n = 46$ ja $k = 45$.

Ongelma 6. Etsi kaikki reaalilukunelikot (x, y, z, w), joille pätee

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

Ratkaisu. Voimme laskea, että

$$\begin{aligned} &\left(x^2 - 4\right)^2 + \left(y^2 - 4\right)^2 + \left(z^2 - 4\right)^2 + \left(w^2 - 4\right)^2 \\ &\qquad = \left(x^4 + y^4 + z^4 + w^4\right) - 8\left(x^2 + y^2 + z^2 + w^2\right) + 64 = 0. \end{aligned}$$

Siispä mahdollisia ratkaisuita ovat ainoastaan ne nelikot (x, y, z, w), joissa $x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 4$, eli ne, joissa jokainen luvuista x, y, z ja w on $+2$ tai -2. Näitä on kuusitoista kappaletta.

Summassa $x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ jokainen termi on joko $+8$ tai -8. Koska summa häviää, esiintyy $+8$ kahdesti ja -8 niin ikään kahdesti. Siten jäljelle jäävät ainoastaan kuusi reaalilukunelikkoa

$$\begin{aligned} &(+2, +2, -2, -2), (+2, -2, +2, -2), (+2, -2, -2, +2), \\ &\qquad (-2, +2, +2, -2), (-2, +2, -2, +2), (-2, -2, +2, +2). \end{aligned}$$

Nämä ovatkin kaikki ratkaisuita. Alkuperäisen yhtälöryhmän symmetrisyyden perusteella riittää laskea, että

$$\begin{cases} (+2)^2 + (+2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16, \\ (+2)^3 + (+2)^3 + (-2)^3 + (-2)^3 = 8 + 8 - 8 - 8 = 0, \\ (+2)^4 + (+2)^4 + (-2)^4 + (-2)^4 = 16 + 16 + 16 + 16 = 64, \\ (+2)^5 + (+2)^5 + (-2)^5 + (-2)^5 = 32 + 32 - 32 - 32 = 0. \end{cases}$$

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja Ratkaisuita

Ongelma 1. Veljekset Akseli, Benjamin, Calle ja Danny ovat kaikki eripituisia. He lausuvat seuraavasti:

> Akseli: Minä en ole lyhyin enkä pisin.
>
> Benjamin: Minä en ole lyhyin.
>
> Calle: Minä olen pisin.
>
> Danny: Minä olen lyhyin.

Tasan yksi veljeksistä valehtelee. Kuka on pisin?

a) Akseli

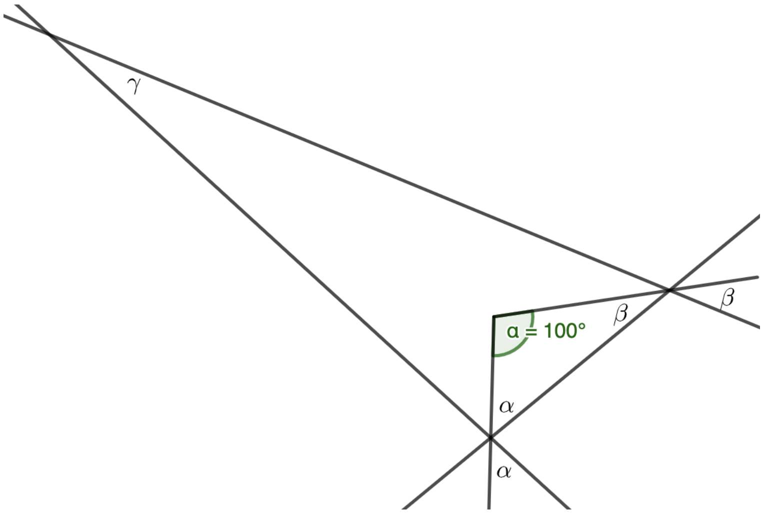
b) Benjamin

c) Calle

d) Danny

Ratkaisu. Jos Akseli valehtelee, niin Calle tai Danny valehtelee. Jos Benjamin valehtelee, niin myös Danny valehtelee. Jos Danny valehtelee, niin myös joku muu valehtelee. Koska vain yksi veljeksistä valehtelee, niin valehtelija on Calle. Koska Akseli ja Danny puhuvat totta ja Calle valehtelee, niin kukaan heistä ei ole pisin. Siksi Benjaminin on oltava pisin.

Ongelma 2. Oheisessa kuvassa kulmat α ja β ovat annettuja. Määritä kulman γ suuruus.



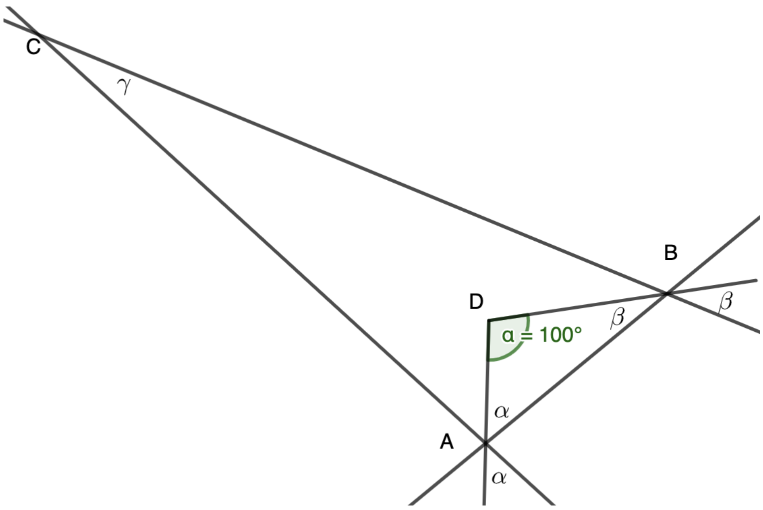
a) 20°

b) $180^\circ - \alpha - \beta$

c) Riippuu kulmien α ja β suuruudesta

d) $180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

Ratkaisu. Nimetään pisteet oheisen kuvan mukaan:



Nyt ristikulmien perusteella $\angle CAD = \alpha$ ja $\angle DBC = \beta$. Koska kolmion kulmien summa on 180°, on

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta,$$

joten viimeinen väite on tosi. Toisaalta, koska

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

niin

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ,$$

joten myös ensimmäinen väite on tosi. Selvästi toinen ja kolmas väite eivät ole tosia.

Ongelma 3. Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $n \geqslant 2$. Tarkastelemme aritmeettista reaalilukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jolle pätee $a_n = n^2$ ja $a_{n^2} = n^3$. Määritä summa

$$a_n + a_{n^2} + a_{n^3} + \ldots + a_{n^k}.$$

Ratkaisu. Merkiten $d = a_2 - a_1$ on siis

$$a_1 + (n-1)\,d = a_n = n^2 \qquad \text{ja} \qquad a_1 + \left(n^2 - 1\right) d = a_{n^2} = n^3.$$

Ottamalla näistä erotukset puolittain on oltava

$$\left(n^2 - 1 - (n-1)\right) d = n^3 - n^2,$$

mistä voi ratkaista

$$d = n.$$

Sijoittamalla takaisin ensimmäiseen yhtälöön on

$$a_1 = n^2 - (n-1)\,d = n^2 - (n-1)\,n = n.$$

Siten jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle ℓ on oltava

$$a_{n^\ell} = a_1 + \left(n^\ell - 1\right) d = n + \left(n^\ell - 1\right) n = n^{\ell+1}.$$

Kysytty summa on siis geometrinen summa

$$\begin{aligned} a_n + a_{n^2} + a_{n^3} + \ldots + a_{n^k} &= n^2 + n^3 + n^4 + \ldots + n^{k+1} \\ &= n^2\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{k-1}\right) = n^2 \cdot \frac{n^k - 1}{n-1}. \end{aligned}$$

Ongelma 4. Tarkastelemme niitä seitsennumeroisia positiivisia kokonaislukuja, joissa esiintyvät numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, kukin täsmälleen kerran. Näitä lukuja on tietenkin $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ erilaista. Järjestämme nämä aidosti kasvavaksi jonoksi lukuja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{7!}$. Mikä luku onkaan a_{2022}?

Ratkaisu. Numerolla 1 alkavia lukuja on luonnollisesti $6! = 720$ kappaletta. Numerolla 2 alkavia lukuja on niin ikään 720 kappaletta, samoin numerolla 3 alkavia lukuja. Koska $2 \cdot 720 = 1440 < 2022 < 2160 = 3 \cdot 720$, on luvun a_{2022} alettava numerolla 3, ja itse asiassa, koska $2022 - 720 - 720 = 582$, kyseessä on suuruusjärjestyksessä 582. numerolla 3 alkava luku listassa.

Numeroilla 3 ja 1 alkavia lukuja on tietenkin $5! = 120$ kappaletta. Samoin numeroilla 3 ja 2 alkavia, jne. Koska $4 \cdot 120 = 480 < 582 < 600 = 5 \cdot 120$, on luvun a_{2022} toisen numeron oltava listan 1, 2, 4, 5, 6, 7 viides numero, eli 6. Luku a_{2022} alkaa siis numeroilla 36, ja koska $582 - 480 = 102$, kyseessä on listan 102. näillä kahdella numerolla alkava luku.

Koska numeroilla 36 alkavia lukuja on 120, ja koska viimeiset viisi numeroa ovat 1, 2, 4, 5 ja 7, ja koska nyt kysytty luku on itse asiassa 19. suurin näistä, voimme selvittää luvun yksinkertaisesti kirjoittamalla numeroilla 36 alkavia listan lukuja laskevassa järjestyksessä:

$$\begin{aligned}&3675421,\ 3675412,\ 3675241,\ 3675214,\ 3675142,\ 3675124,\\&3674521,\ 3674512,\ 3674251,\ 3674215,\ 3674152,\ 3674125,\\&3672541,\ 3672514,\ 3672451,\ 3672415,\ 3672154,\ 3672145,\\&3671542,\ \ldots\end{aligned}$$

Siten kysytty luku a_{2022} on 3671542.

Ongelma 5. Pallot S_1 ja S_2 leikkaavat toisensa siten, että pallon S_2 keskipiste on leikkausympyrän määräämässä tasossa. Pallon S_1 tilavuuden suhde pallon S_2 tilavuuteen on 125 : 27. Määritä pallon S_1 ulkopuolelle jäävän pallon S_2 osan tilavuuden suhde pallon S_2 ulkopuolelle jäävän pallon S_1 osan tilavuuteen.

[Vihje: Kun r on positiivinen reaaliluku, ja h sellainen positiivinen reaaliluku, että $0 < h < 2r$, niin r-säteisen pallon segmentin, jonka korkeus on h, tilavuus on $\pi\, h^2\,(r - h/3)$.]

Ratkaisu. Olkoon pallon S_1 keskipiste O_1 ja säde r_1, ja olkoon pallon S_2 keskipiste O_2 ja säde r_2. Pallojen tilavuuksien suhteesta voimme päätellä, että

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} = \frac{\dfrac{4}{3}\,\pi\, r_1^3}{\dfrac{4}{3}\,\pi\, r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3,$$

joten $r_2 = 3\, r_1/5$.

Tarkastelemalla suorakulmaista kolmiota, jonka kärkinä ovat O_1, O_2 ja jokin pallojen S_1 ja S_2 kuorten leikkauspiste, voimme Pythagoraan lauseen nojalla päätellä, että

$$O_1\, O_2 = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{3\, r_1}{5}\right)^2} = \frac{4\, r_1}{5}.$$

Erityisesti, leikkausympyrän määräämä taso leikkaa pallosta S_1 pois segmentin, jonka korkeus h on

$$h = r_1 - \frac{4\, r_1}{5} = \frac{r_1}{5},$$

ja tilavuus siten

$$V' = \pi\, h^2 \left(r_1 - \frac{h}{3}\right) = \pi \left(\frac{r_1}{5}\right)^2 \left(r_1 - \frac{r_1}{15}\right) = \pi\, r_1^3 \cdot \frac{14}{3 \cdot 5^3}.$$

Pallosta S_2 pallon S_1 ulkopuolelle jäävä tilavuus on sama kuin pallon S_2 tilavuuden puolikkaan ja juuri lasketun segmentin tilavuuden erotus, eli

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\,\pi\, r_2^3 - \pi\, r_1^3 \cdot \frac{14}{3 \cdot 5^3} = \pi\, r_1^3 \left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \frac{14}{3 \cdot 5^3}\right) = \pi\, r_1^3 \cdot \frac{40}{3 \cdot 5^3}.$$

Pallosta S_1 pallon S_2 ulkopuolelle jäävä tilavuus on pallon S_1 tilavuus, josta vähennetään puolet pallon S_2 tilavuudesta sekä segmentin tilavuus V', eli

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{4}{3}\,\pi\, r_1^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\,\pi\, r_2^3 - V' = \frac{4}{3}\,\pi\, r_1^3 - \frac{2}{3}\,\pi\, r_1^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 - \pi\, r_1^3 \cdot \frac{14}{3 \cdot 5^3} \\ &= \pi\, r_1^3 \left(\frac{4 \cdot 5^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{54}{3 \cdot 5^3} - \frac{14}{3 \cdot 5^3}\right) = \pi\, r_1^3 \cdot \frac{432}{3 \cdot 5^3}. \end{aligned}$$

Kysytty tilavuuksien suhde on siis

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{40}{432} = \frac{5}{54}.$$

Ongelma 6. Etsi kaikki reaalilukunelikot (x, y, z, w), joille pätee

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 16, \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0, \\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 64, \\ x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 0. \end{cases}$$

Ratkaisu. Voimme laskea, että

$$\begin{aligned} &\left(x^2-4\right)^2 + \left(y^2-4\right)^2 + \left(z^2-4\right)^2 + \left(w^2-4\right)^2 \\ &\qquad = \left(x^4+y^4+z^4+w^4\right) - 8\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right) + 64 = 0. \end{aligned}$$

Siispä mahdollisia ratkaisuita ovat ainoastaan ne nelikot (x, y, z, w), joissa $x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 4$, eli ne, joissa jokainen luvuista x, y, z ja w on $+2$ tai -2. Näitä on kuusitoista kappaletta.

Summassa $x^3 + y^3 + z^3 + w^3$ jokainen termi on joko $+8$ tai -8. Koska summa häviää, esiintyy $+8$ kahdesti ja -8 niin ikään kahdesti. Siten jäljelle jäävät ainoastaan kuusi reaalilukunelikkoa

$$\begin{aligned} &(+2,+2,-2,-2), (+2,-2,+2,-2), (+2,-2,-2,+2), \\ &\qquad (-2,+2,+2,-2), (-2,+2,-2,+2), (-2,-2,+2,+2). \end{aligned}$$

Nämä ovatkin kaikki ratkaisuita. Alkuperäisen yhtälöryhmän symmetrisyyden perusteella riittää laskea, että

$$\begin{cases} (+2)^2 + (+2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 4+4+4+4 = 16, \\ (+2)^3 + (+2)^3 + (-2)^3 + (-2)^3 = 8+8-8-8 = 0, \\ (+2)^4 + (+2)^4 + (-2)^4 + (-2)^4 = 16+16+16+16 = 64, \\ (+2)^5 + (+2)^5 + (-2)^5 + (-2)^5 = 32+32-32-32 = 0. \end{cases}$$