# YHTÄLÖN RATKAISUN HISTORIAA

Ari Heimonen

September 26, 2023

MAOL:in syyspäivien 2023 materiaalia

# SISÄLLYS

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Varhaisia kulttuureja (keskeisimmät Egypti, Babylonia, Kiina ja Intia) Kreikkaa lukuunottamatta yhdistää se, että suurin osa säilyneistä matemaattisista lähteistä on probleemikokoelmia, joissa esitetään jokin ongelma ja sen jälkeen ratkaisu. Ongelmissa on kiinteät lukuarvot ja ratkaisu esitetetään sanallisesti näiden arvojen avulla. Yleisiä sääntöjä ei esiinny tunnetuissa lähteissä. Ongelmissa esiintyy ensimmäisen asteen yhtälöitä ja toisen asteen yhtälöitä, joille yleensä haetaan yksi ratkaisu.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Varhaisia kulttuureja (keskeisimmät Egypti, Babylonia, Kiina ja Intia) Kreikkaa lukuunottamatta yhdistää se, että suurin osa säilyneistä matemaattisista lähteistä on probleemikokoelmia, joissa esitetään jokin ongelma ja sen jälkeen ratkaisu. Ongelmissa on kiinteät lukuarvot ja ratkaisu esitetetään sanallisesti näiden arvojen avulla. Yleisiä sääntöjä ei esiinny tunnetuissa lähteissä. Ongelmissa esiintyy ensimmäisen asteen yhtälöitä ja toisen asteen yhtälöitä, joille yleensä haetaan yksi ratkaisu.

Esimerkiksi Babylonialaisessa tekstissä BM 13901 on seuraava ongelma ratkaisuineen, jossa lukujärjestelmänä on 60-kantainen seksagesimaalijärjestelmä.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Varhaisia kulttuureja (keskeisimmät Egypti, Babylonia, Kiina ja Intia) Kreikkaa lukuunottamatta yhdistää se, että suurin osa säilyneistä matemaattisista lähteistä on probleemikokoelmia, joissa esitetään jokin ongelma ja sen jälkeen ratkaisu. Ongelmissa on kiinteät lukuarvot ja ratkaisu esitetetään sanallisesti näiden arvojen avulla. Yleisiä sääntöjä ei esiinny tunnetuissa lähteissä. Ongelmissa esiintyy ensimmäisen asteen yhtälöitä ja toisen asteen yhtälöitä, joille yleensä haetaan yksi ratkaisu.

Esimerkiksi Babylonialaisessa tekstissä BM 13901 on seurava ongelma ratkaisuineen, jossa lukujärjestelmänä on 60-kantainen seksagesimaalijärjestelmä.

"Olen vähentänyt neliön sivun alasta ja se on 14,30."

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Varhaisia kulttuureja (keskeisimmät Egypti, Babylonia, Kiina ja Intia) Kreikkaa lukuunottamatta yhdistää se, että suurin osa säilyneistä matemaattisista lähteistä on probleemikokoelmia, joissa esitetään jokin ongelma ja sen jälkeen ratkaisu. Ongelmissa on kiinteät lukuarvot ja ratkaisu esitetetään sanallisesti näiden arvojen avulla. Yleisiä sääntöjä ei esiinny tunnetuissa lähteissä. Ongelmissa esiintyy ensimmäisen asteen yhtälöitä ja toisen asteen yhtälöitä, joille yleensä haetaan yksi ratkaisu.

Esimerkiksi Babylonialaisessa tekstissä BM 13901 on seurava ongelma ratkaisuineen, jossa lukujärjestelmänä on 60-kantainen seksagesimaalijärjestelmä.

"Olen vähentänyt neliön sivun alasta ja se on 14,30."

Aluksi 60-järjestelmän luku $14{,}30 = 14 \cdot 60 + 30 = 870$ kymmenjärjestelmässä eli ratkaistava on yhtälö

$$x^2 - x = 870.$$

Ratkaisu kuuluu

"Ota 1 ($x$:n kerroin), jaa se kahdella (=0;30). $0;30 \cdot 0;30 = 0;15$. Lisää 14,30 tähän, ja luvun 14,30;15 neliöjuuri on 29;30. Lisää luku 0;30, se, jonka olet kertonut itsellään, tähän ja tämä on neliön sivu."

Ratkaisu kuuluu

"Ota 1 ($x$:n kerroin), jaa se kahdella (=0;30). $0;30 \cdot 0;30 = 0;15$. Lisää 14,30 tähän, ja luvun 14,30;15 neliöjuuri on 29;30. Lisää luku 0;30, se, jonka olet kertonut itsellään, tähän ja tämä on neliön sivu."

Laskettiin siis seuraavasti (lasku kymmenjärjestelmässä suluissa):

$$\sqrt{0;30^2 + 14{,}30} + 0;30 \left( = \sqrt{0{,}5^2 + 870} + 0{,}5 \right) = 30$$

Ratkaisu kuuluu

"Ota 1 ($x$:n kerroin), jaa se kahdella (=0;30). $0;30 \cdot 0;30 = 0;15$. Lisää 14,30 tähän, ja luvun 14,30;15 neliöjuuri on 29;30. Lisää luku 0;30, se, jonka olet kertonut itsellään, tähän ja tämä on neliön sivu."

Laskettiin siis seuraavasti (lasku kymmenjärjestelmässä suluissa):

$$\sqrt{0;30^2 + 14{,}30} + 0;30 \left( = \sqrt{0{,}5^2 + 870} + 0{,}5 \right) = 30$$

Yhtälö

$$x^2 - ax = b$$

Ratkaistiin käyttäen kaavaa

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}.$$

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Kaavan johtoa ei tunnetuista lähteistä löydy, mutta lasku osoittanee, että myös yleistä teoriaa harrastettiin eikä pelkästään keksitty ratkaisua tehtävä tehtävältä aina uudelleen.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Kaavan johtoa ei tunnetuista lähteistä löydy, mutta lasku osoittanee, että myös yleistä teoriaa harrastettiin eikä pelkästään keksitty ratkaisua tehtävä tehtävältä aina uudelleen.

Kiinan erikoisuus on, että he käyttivät myös negatiivisia lukuja jo ennen ajanlaskun alkua ja osasivat laskea näillä.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Kaavan johtoa ei tunnetuista lähteistä löydy, mutta lasku osoittanee, että myös yleistä teoriaa harrastettiin eikä pelkästään keksitty ratkaisua tehtävä tehtävältä aina uudelleen.

Kiinan erikoisuus on, että he käyttivät myös negatiivisia lukuja jo ennen ajanlaskun alkua ja osasivat laskea näillä.

Intiassa ratkottiin myös toisen asteen yhtälöitä ja matemaatikot **Brahmagupta** ja **Bhaskara II** (elivät 1000-luvun molemmin puolin) esittivät oleellisesti nykyaikaisen toisen asteen yhtälön ratkaisun, josta saadaan molemmat ratkaisut, myös negatiiviset.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Kaavan johtoa ei tunnetuista lähteistä löydy, mutta lasku osoittanee, että myös yleistä teoriaa harrastettiin eikä pelkästään keksitty ratkaisua tehtävä tehtävältä aina uudelleen.

Kiinan erikoisuus on, että he käyttivät myös negatiivisia lukuja jo ennen ajanlaskun alkua ja osasivat laskea näillä.

Intiassa ratkottiin myös toisen asteen yhtälöitä ja matemaatikot **Brahmagupta** ja **Bhaskara II** (elivät 1000-luvun molemmin puolin) esittivät oleellisesti nykyaikaisen toisen asteen yhtälön ratkaisun, josta saadaan molemmat ratkaisut, myös negatiiviset.

Kreikkalaisen matematiikan valtavirta oli geometrinen. Tämä johti nk. dimensioprobleemaan, jonka mukaan erotettiin positiiviset kokonaisluvut, suhteet ja geometriset suureet: pituus, pinta-ala ja tilavuus. Pituuden toinen potenssi oli siis pinta-ala ja kolmas tilavuus. Tämän mukaan aiemmmin esittämämme babylonialainen yhtälö ei siis ollut edes mielekäs kuten ei neljäs potenssikaan.

Kreikkalaiset tekivät kyllä nk. geometrista algebraa, mutta sen tarkasteluun tarvittaisiin toinen esitelmä.

# VARHAISHISTORIAA (–n. 1000)

Kreikkalaiset tekivät kyllä nk. geometrista algebraa, mutta sen tarkasteluun tarvittaisiin toinen esitelmä.

**Diofantos** poikkesi muusta tunnetusta kreikkalaisesta perinteestä ja teki algebrallista geometriaa geometrisen algebran sijasta ja päätyönään tutki toisen asteen käyriä yhtälöitten avulla. Hänen tunnetut työnsä palaavat myös vanhaan probeleemikokoelmatraditioon, mutta kaikessa hänen esittämässään on yleispätevät metodit. Diofantosta ei rajoittanut dimensioprobleema, vaan hän tutki potensseja kuudenteen asti. Hänen elämästään ei tiedetä juuri muuta kuin yhtälö, jonka sanotaan olevan hänen hautakirjoituksensa:

Kreikkalaiset tekivät kyllä nk. geometrista algebraa, mutta sen tarkasteluun tarvittaisiin toinen esitelmä.

**Diofantos** poikkesi muusta tunnetusta kreikkalaisesta perinteestä ja teki algebrallista geometriaa geometrisen algebran sijasta ja päätyönään tutki toisen asteen käyriä yhtälöitten avulla. Hänen tunnetut työnsä palaavat myös vanhaan probeleemikokoelmatraditioon, mutta kaikessa hänen esittämässään on yleispätevät metodit. Diofantosta ei rajoittanut dimensioprobleema, vaan hän tutki potensseja kuudenteen asti. Hänen elämästään ei tiedetä juuri muuta kuin yhtälö, jonka sanotaan olevan hänen hautakirjoituksensa:

"Hänen poikavuotensa kestivät kuudenneksen hänen elämästään, siihen lisättynä kahdestoistaosa ja hänen partansa alkoi kasvaa, siihen vielä seitsemäsosa, jolloin hän meni naimisiin; hänen poikansa syntyi viiden vuoden kuluttua tästä. Poika eli puolet isänsä elinajasta, ja isä kuoli neljä vuotta pojan jälkeen."

Diofantos käytti jonkin verran symboliikkaa. Muuttujana hän käytti kirjainta $\varsigma$ ja hänellä oli merkinnät potensseille kuudenteen asti. Hän myös esitti kaiketi ensimmäisenä yhtälönratkaisun periaatteet: termien lisääminen ja vähentäminen puolittain.

Diofantos käytti jonkin verran symboliikkaa. Muuttujana hän käytti kirjainta $\varsigma$ ja hänellä oli merkinnät potensseille kuudenteen asti. Hän myös esitti kaiketi ensimmäisenä yhtälönratkaisun periaatteet: termien lisääminen ja vähentäminen puolittain.

Islamilaisessa maailmassa **Al-Khawarizmia** (n. 780–850) voidaan kutsua algebran isäksi, jos kriteeriksi riittää se, kenen antamalla nimellä lasta kutsutaan. Hän julkaisi teoksen **Al-Jabr w'al Muqabala**, jossa hän ilmeisesti Diofantosta tuntematta esitti yhtälön ratkaisuperiaatteet: termien lisääminen puolittain (al-jabr) ja vähentäminen puolittain (al-muqabala). Sanasta al-jabr juontaa nimitys algebra ja lisäksi kyseisen herran nimestä juontaa sana algoritmi.

Lukujen suhteen Al-Khawarizmi käyttää intiasta periytynyttä paikkadesimaalijärjestelmää. Hän esittää myös oleellisesti nykyaikaisen tavan laskea alekkain ja hänen töidensä perusteella laskutapa tuli tutuksi Euroopassa n. 1200 alkaen **Leonardo Fibonazzin** välityksellä ja syrjäytti vähitellen laskemisen roomalaisilla numeroilla. Al-Khawarizmi ei hyväksynyt negatiivisia lukuja yhtälön kertoimiksi eikä ratkaisuiksi.

Lukujen suhteen Al-Khawarizmi käyttää intiasta periytynyttä paikkadesimaalijärjestelmää. Hän esittää myös oleellisesti nykyaikaisen tavan laskea alekkain ja hänen töidensä perusteella laskutapa tuli tutuksi Euroopassa n. 1200 alkaen **Leonardo Fibonazzin** välityksellä ja syrjäytti vähitellen laskemisen roomalaisilla numeroilla. Al-Khawarizmi ei hyväksynyt negatiivisia lukuja yhtälön kertoimiksi eikä ratkaisuiksi.

Toisen asteen yhtälöiden osalta esitti luokituksen, mihin muotoihin yhtälöt voidaan saattaa käyttäen yllämainittaja metodeja ja esitti ratkaisun kussakin tapauksessa neliöksi täydentämällä. Joissakin tapauksissa hän esitti yhtälölle kaksi ratkaisua, mutta ei systemaattisesti.

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisuun liittyy kertomisen arvoinen tarina. 1400–1500-luvulla oli tapana järjestää matematiikkakilpailuja, joissa liikkui huomattava summia rahaa. **Tartaglia** (n. 1499–1557) oli menestynyt näissä ja keksinyt ratkaisun kolmannen asteen yhtälön yhteen erikoistapaukseen. Tartaglia kertoi **Cardanolle** (1501–1576) ratkaisun ja vannotti tällä valan, ettei hän paljastaisi ratkaisua. Cardano kuitenkin yleisti Tartaglian ratkaisun muihin tapauksiin ja hänen työtoverinsa **Ferrari** keksi myös neljännen asteen yhtälön ratkaisun, joka perustui kolmannen asteen yhtälön ratkaisulle. Cardano tutki edesmenneen matemaatikko **del Ferron** papereita ja löysi niistä Tartaglian ratkaisun. Cardano katsoi valansa rauenneen, koska pystyi osoittamaan, että del Ferro oli keksinyt ratkaisun ennen Tartagliaa. Cardano julkaisi teoksen **Ars Magna**, jossa hän esitti kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisut. Tartaglia luonnollisesti raivostui tästä ja kutsui Cardanoa valapatoksi.

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Renesanssin aikana ei tunnettu negatiivisia lukuja eikä hyväksytty niitä yhtälön kertoimiksi eikä ratkaisuiksi. Kolmannen asteen yhtälö jaettiin kolmeen tapaukseen

$$
\begin{aligned}
x^3 + px &= q \\
x^3 &= px + q \\
x^3 + q &= px,
\end{aligned}
$$

missä $p$ ja $q$ ovat positiivisia. Tartaglian ratkaisu puri näistä ensimmäiseen ja Cardano ratkaisi kaksi seuraavaa.

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Renesanssin aikana ei tunnettu negatiivisia lukuja eikä hyväksytty niitä yhtälön kertoimiksi eikä ratkaisuiksi. Kolmannen asteen yhtälö jaettiin kolmeen tapaukseen

$$\begin{aligned} x^3 + px &= q \\ x^3 &= px + q \\ x^3 + q &= px, \end{aligned}$$

missä $p$ ja $q$ ovat positiivisia. Tartaglian ratkaisu puri näistä ensimmäiseen ja Cardano ratkaisi kaksi seuraavaa.

Joku saattaa nyt ihmetellä, että tapauksiahan pitäisi olla paljon enemmän. Tälle löytyy selitys seuraavasta, jossa yleinen yhtälö palautetaan nykyaikaisin merkinnöin muotoon

$$x^3 - px - q = 0.$$

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Aluksi yleinen kolmannen asteen yhtälö

$$a_3y^3 + a_2y^2 + a_1x + a_0 = 0$$

voidaan jakaa kertoimella $a_3 \neq 0$, jolloin saadaan

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Aluksi yleinen kolmannen asteen yhtälö

$$a_3y^3 + a_2y^2 + a_1x + a_0 = 0$$

voidaan jakaa kertoimella $a_3 \neq 0$, jolloin saadaan

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

missä $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$ ja $c = \frac{a_0}{a_3}$.

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Aluksi yleinen kolmannen asteen yhtälö

$$a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

voidaan jakaa kertoimella $a_3 \neq 0$, jolloin saadaan

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

missä $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$ ja $c = \frac{a_0}{a_3}$.
Sijoitetaan tähän $y = x - \frac{1}{3}a$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(x - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(x - \frac{1}{3}a\right) + c \\ =& x^3 - \left(\frac{1}{3}a^2 - b\right)x - \left(\frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c\right). \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}a^2 - b \\ q = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c, \end{cases}$$

jolloin saadaan yhtälö

$$x^3 - px - q = 0.$$

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Merkitään

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}a^2 - b \\ q = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c, \end{cases}$$

jolloin saadaan yhtälö

$$x^3 - px - q = 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön $x = u + v$:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - p(u+v) - q &= 0 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + u^3 - p(u+v) - q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) - q &= 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

# KOLMANNEN ASTEEN YHTÄLÖ

Merkitään

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}a^2 - b \\ q = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c, \end{cases}$$

jolloin saadaan yhtälö

$$x^3 - px - q = 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön $x = u + v$:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 - p(u+v) - q &= 0 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + u^3 - p(u+v) - q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) - q &= 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Nyt (1) on totta, jos

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ 3uv = p \end{cases}$$

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö puolittain luvulla 3 ja korotetaan kolmanteen potenssiin, jolloin saadaan

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \end{cases}$$

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö puolittain luvulla 3 ja korotetaan kolmanteen potenssiin, jolloin saadaan

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \end{cases}$$

Oletetaan, että $w \geq 0$ ja sijoitetaan

$$\begin{cases} u^3 = \frac{1}{2}q + w \\ v^3 = \frac{1}{2}q - w, \end{cases} \tag{2}$$

jolloin ensimmäinen yhtälö toteutuu.

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö puolittain luvulla 3 ja korotetaan kolmanteen potenssiin, jolloin saadaan

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \end{cases}$$

Oletetaan, että $w \geq 0$ ja sijoitetaan

$$\begin{cases} u^3 = \frac{1}{2}q + w \\ v^3 = \frac{1}{2}q - w, \end{cases} \tag{2}$$

jolloin ensimmäinen yhtälö toteutuu. Toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}q + w\right)\left(\frac{1}{2}q - w\right) &= \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \\ \left(\frac{1}{2}q\right)^2 - w^2 &= \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \\ w^2 &= \left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3. \end{aligned}$$

Saadaan

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}.$$

Yhtälöistä (2) saadaan

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} \\ v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w} \end{cases}$$

Siis

Saadaan

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}.$$

Yhtälöistä (2) saadaan

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} \\ v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w} \end{cases}$$

Siis

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w} \\ w &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}. \end{aligned}}$$

Saatuja kaavoja kutsutaan **Cardanon kaavoiksi**.

Saatuja kaavoja kutsutaan **Cardanon kaavoiksi**.

ESIMERKKI. Ratkaise yhtälö

$$y^3 + 3y^2 - 6y - 20 = 0$$

RATKAISU: Aluksi sijoitetaan

$$y = x - \frac{1}{3} \cdot 3 = x - 1 :$$

Saatuja kaavoja kutsutaan **Cardanon kaavoiksi**.

ESIMERKKI. Ratkaise yhtälö

$$y^3 + 3y^2 - 6y - 20 = 0$$

RATKAISU: Aluksi sijoitetaan

$$y = x - \frac{1}{3} \cdot 3 = x - 1 :$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 6(x-1) - 20 &= 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3(x^2 - 2x + 1) - 6x + 6 - 20 &= 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 6x + 6 - 20 &= 0 \\ x^3 - 9x - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan Cardanon kaavaan:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)^3} = \sqrt{6^2 - 3^3} = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3$$

Sijoitetaan Cardanon kaavaan:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)^3} = \sqrt{6^2 - 3^3} = \sqrt{36-27} = \sqrt{9} = 3$$

ja

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 + 3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 - 3} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \approx 3{,}52.$$

Sijoitetaan Cardanon kaavaan:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)^3} = \sqrt{6^2 - 3^3} = \sqrt{36-27} = \sqrt{9} = 3$$

ja

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 + 3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 - 3} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \approx 3{,}52.$$

Lopulta

$$y = x - 1 = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} - 1 \approx 2{,}52.$$

Sijoitetaan Cardanon kaavaan:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)^3} = \sqrt{6^2 - 3^3} = \sqrt{36-27} = \sqrt{9} = 3$$

ja

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 + 3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 12 - 3} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \approx 3{,}52.$$

Lopulta

$$y = x - 1 = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} - 1 \approx 2{,}52.$$

HUOMAUTUS. Cardanon kaavoista saadaan periaatteessa kaikki kolme ratkaisua, kun otetaan huomioon, että kuutiojuuri on kompleksialueessa kolmiarvoinen funktio.

Cardanon kaavat johtavat vaikeuksiin, jos

$$\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3 < 0,$$

jolloin w saa imaginaarisen arvon ja x esityksen kahden kompleksisen kuutiojuuren summana. **Bombelli** (1526–1572) kehitti menetelmän, jolla monissa tapauksissa kuutiojuuret saadaan laskettua ja vastaukseksi lopulta reaaliluku. Hän siis laski kompleksiluvuilla ennen kuin Euroopassa oli laskettu negatiivisilla luvuilla!

# JATKOKEHITYSTÄ

Cardanon kaavat johtavat vaikeuksiin, jos

$$\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3 < 0,$$

jolloin w saa imaginaarisen arvon ja x esityksen kahden kompleksisen kuutiojuuren summana. **Bombelli** (1526–1572) kehitti menetelmän, jolla monissa tapauksissa kuutiojuuret saadaan laskettua ja vastaukseksi lopulta reaaliluku. Hän siis laski kompleksiluvuilla ennen kuin Euroopassa oli laskettu negatiivisilla luvuilla!

Cardanon työtoveri Ferrari kehitti myös neljännen asteen yhtälöiden ratkaisumenetelmän, joka perustuu kolmannen asteen yhtälön ratkaisulle. Menetelmä johtaa yleensä erittäin monimutkaisiin juurilausekkeisiin eikä sillä ole juuri käytännöllistä merkitystä.

# JATKOKEHITYSTÄ

Antiikin kreikan matemaattisen perinteen mukaan oli kahdenlaisia matemaattisia probleemeja, teoreeman todistaminen ja geometrisen konstruktion tekeminen. **Viète** (1540-1603) lisäsi tähän kolmannen, jossa ongelmasta muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se. Hän kutsui tätä matematiikkaa analyysiksi (nimitys algebra otettiin käyttöön myöhemmin).

Antiikin kreikan matemaattisen perinteen mukaan oli kahdenlaisia matemaattisia probleemeja, teoreeman todistaminen ja geometrisen konstruktion tekeminen. **Viète** (1540-1603) lisäsi tähän kolmannen, jossa ongelmasta muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se. Hän kutsui tätä matematiikkaa analyysiksi (nimitys algebra otettiin käyttöön myöhemmin).

Lisäksi hän esitti nykyaikaisen symboliikan perusteet, erityisesti sen, että myös tunnettuja suureita merkittiin kirjaimella. Häneltä peräisin on idea, että yhtälön kertoimia merkitaan alkupään aakkosilla ja muutttujia loppupään.

# JATKOKEHITYSTÄ

Antiikin kreikan matemaattisen perinteen mukaan oli kahdenlaisia matemaattisia probleemeja, teoreeman todistaminen ja geometrisen konstruktion tekeminen. **Viète** (1540-1603) lisäsi tähän kolmannen, jossa ongelmasta muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se. Hän kutsui tätä matematiikkaa analyysiksi (nimitys algebra otettiin käyttöön myöhemmin).

Lisäksi hän esitti nykyaikaisen symboliikan perusteet, erityisesti sen, että myös tunnettuja suureita merkittiin kirjaimella. Häneltä peräisin on idea, että yhtälön kertoimia merkitaan alkupään aakkosilla ja muutttujia loppupään.

Negatiivisia lukuja Euroopassa käytettiin aluksi talouslaskennassa "velkoina". Ne hyväksyttiin pikkuhiljaa 1600-luvun jälkeen, joskin aluksi niitä saatettiin pitää "teknisenä temppuna". **Stevin** (1548–1620) ennakoi reaaliluvun käsitettä ja esitti perustan nykyaikaiselle desimaaliluvuilla laskemiselle ja piti myös negatiivisia lukuja lukuina, mutta ei hyväksynyt kompleksilukuja.

Kompleksiluvuilla laskettiin formaalisti jo Cardanon aikana, mutta varsinaisesti ne alettiin hyväksyä matemaattisiksi objekteiksi eikä vain formaaleina välivaiheina **Eulerin** (1707–1783) töissä. Euler otti käyttöön myös merkinnän $i$.

# JATKOKEHITYSTÄ

Kompleksiluvuilla laskettiin formaalisti jo Cardanon aikana, mutta varsinaisesti ne alettiin hyväksyä matemaattisiksi objekteiksi eikä vain formaaleina välivaiheina **Eulerin** (1707–1783) töissä. Euler otti käyttöön myös merkinnän $i$.

**Galois** (1811–1832) todisti, että viidennen asteen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei voi esittää yleistä ratkaisukaavaa käyttäen laskutoimituksia yhteen-, vähennys- kerto- ja jakolasku sekä $n$:nnen juuren otto.

# JATKOKEHITYSTÄ

Kompleksiluvuilla laskettiin formaalisti jo Cardanon aikana, mutta varsinaisesti ne alettiin hyväksyä matemaattisiksi objekteiksi eikä vain formaaleina välivaiheina **Eulerin** (1707–1783) töissä. Euler otti käyttöön myös merkinnän $i$.

**Galois** (1811–1832) todisti, että viidennen asteen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei voi esittää yleistä ratkaisukaavaa käyttäen laskutoimituksia yhteen-, vähennys- kerto- ja jakolasku sekä $n$:nnen juuren otto.

**Gauss** (1777–1855) todisti algeran peruslauseen, ts. sen, että $n$:nnen asteen yhtälöllä on täsmälleen $n$ juurta, kun huomioidaan moninkertaiset juuret ja kompleksijuuret, joskin tätä tulosta oli ennakoitu aiemminkin.

# LÄHTEET


[1] Datta B., Singh A.N. (1962) *History of Hindu Mathematics*, Asia Publishing House, Bombay

[2] van der Waerden B.L.(1956) *Erwachede Wissenschaft*, Birkhäuser Verlag, Basel

[3] van der Waerden B.L.(1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilicazions*, Springer Verlag, Heidelberg

[4] van der Waerden B.L. (1985) *A History of Algebra*, Springer Verlag, Heidelberg