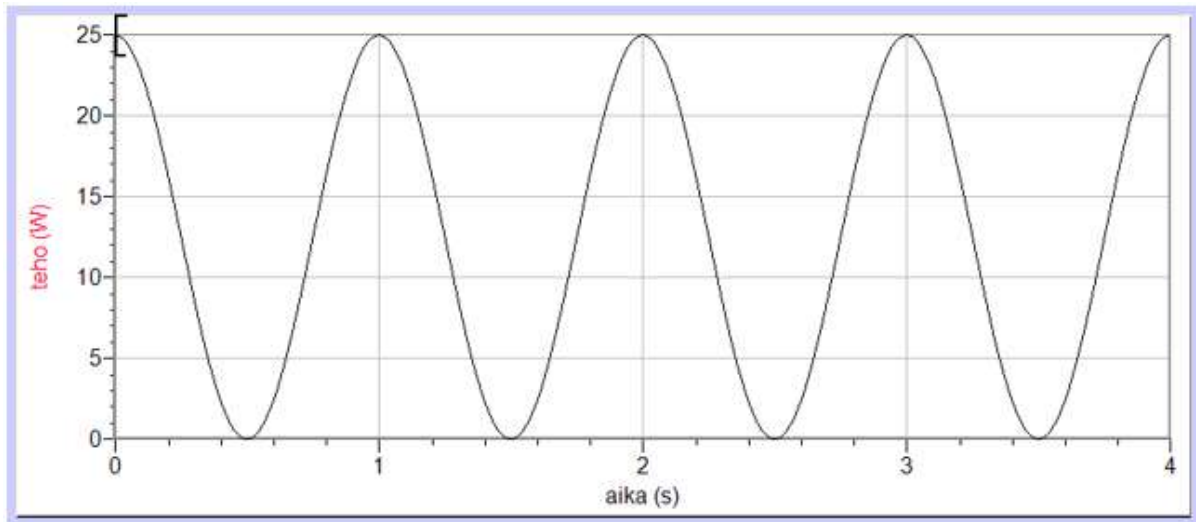


T.3 Vastus vaihtovirtapiirissä

Aineiston 3.A kuvaaja esittää vaihtojännitelähteeseen kytketyn vastuksen tehoa ajan funktiona. Vastuksen resistanssi on $2,5 \Omega$.

Vastaa monivalintatehtäviin.



Mikä on vaihtojännitteen taajuus?

0,50 Hz

Tehon hetkellinen arvo saadaan jännitteen ja sähkövirran hetkellisten arvojen tulona. Tehon kuvaajassa on huippuarvo sekä jännitteen ja sähkövirran positiivisilla huippuarvoilla että negatiivisilla huippuarvoilla. Näin ollen tehon taajuus on kaksinkertainen verrattuna jännitteen ja sähkövirran taajuuteen.

Mikä on sähkövirran huippuarvo?

3,2 A

Tehon huippuarvo saadaan jännitteen ja sähkövirran huippuarvojen tulona: $P = u_0 i_0$.

Sijoitetaan tähän Ohmin laista $u_0 = R i_0$, jolloin saadaan $P = R i_0^2$. Ratkaistaan sähkövirran

huippuarvolle $i_0 = \sqrt{\frac{P}{R}}$.

Mikä on jännitteen tehollinen arvo?

5,6 V

Sijoitetaan tehon huippuarvon yhtälöön Ohmin laista $i_0 = \frac{u_0}{R}$, jolloin saadaan $P = \frac{u_0^2}{R}$.

Ratkaistaan jännitteen huippuarvolle $u_0 = \sqrt{PR}$, josta saadaan sinimuotoisen jännitteen

tehollinen arvo: $U = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{PR}{2}}$.

Vaihtoehtoisesti lasketaan tehon huippuarvon ja edellisen kohdan tuloksen eli sähkövirran huippuarvon avulla jännitteen huippuarvo ja siitä edelleen jännitteen tehollinen arvo.

Mikä on tehon huippuarvo, jos jännitteen taajuus kaksinkertaistuu?

25 W

Tehon huippuarvo ei muutu, vaikka jännitteen taajuus muuttuisi. Huippuarvo on edelleen jännitteen ja sähkövirran huippuarvojen tulo.

Huomaa, että vastus on kytketty vaihtojännitelähteeseen, ei generaattoriin. Jos generaattoria pyöritettäisiin kaksinkertaisella taajuudella, myös jännitteen huippuarvo muuttuisi.

Mikä on tehon huippuarvo, jos jännitteen huippuarvo kaksinkertaistuu?

100 W

Tehon huippuarvo on suoraan verrannollinen jännitteen huippuarvon neliöön (yhtälö aikaisemmassa kohdassa, jossa kysytään jännitteen tehollista arvoa). Jännitteen huippuarvon kaksinkertaistuessa sen neliö nelinkertaistuu. Niinpä tehon huippuarvo nelinkertaistuu.

T.4 Kokeellinen tehtävä

Määritä 2 euron kolikon massa hyödyntäen muoviviivoitinta, 5,0 g:n punnusta ja pöydän reunaa.

Tee vähintään viisi eri mittausta ja hyödynnä graafista esitystä.

Anna vastauksessasi kaikki mittaustulokset ja kerro, miten hyödynsit annettuja välineitä, ja mitä mittauksia teit. Pohdi myös, mitä virhelähteitä määrittämiseen liittyy.

Ratkaisu:

Ensin etsitään viivoittimen painopisteen paikka liikuttamalla viivoitinta pöydän reunan yli. Painopiste on kohdassa, jossa viivoitin pysyy juuri ja juuri tasapainossa keikahtamatta reunan yli.

Tämän jälkeen viivoitinta ei enää siirretä.

Seuraavaksi toistetaan mittausta, jossa pöydän yläpuolella olevan viivoittimen osan päälle sijoitettu punnus riittää juuri ja juuri tasapainottamaan viivoittimen, kun ilmassa olevan osan päällä on kolikko.

Esimerkiksi: Kun kolikko on $R = 5,0$ cm:n etäisyydellä pöydän reunasta ja viivoittimen painopisteestä, punnus viivoittimen toisessa päässä pitää viivoittimen tasapainossa. Kun punnusta lähdetään tuomaan kohti pöydän reunaa, viivoitin pysyy juuri ja juuri tasapainossa vielä, kun punnus on $r = 8,9$ cm:n etäisyydellä pöydän reunasta.

Tämä voisi myös olla yksittäinen mittaus kolikon massan määrittämiseksi. Tilanteessa kolikon ja punnuksen painojen aiheuttamat momentit ovat tasapainoehdon $\sum M = 0$ mukaan yhtä suuret.

Yksittäisen mittauksen perusteella kolikon massaksi saadaan

$$G_{\text{kolikko}} R = G_{\text{punnus}} r$$

$$m_{\text{kolikko}} \cancel{g} R = m_{\text{punnus}} \cancel{g} r$$

$$m_{\text{kolikko}} = \frac{m_{\text{punnus}} r}{R} = \frac{5,0 \text{ g} \cdot 8,9 \text{ cm}}{5,0 \text{ cm}} = 8,9 \text{ g}.$$

Kolikon massa saadaan määritettyä tarkemmin tekemällä useampi edellä kuvattu mittaus, jossa kolikon etäisyyttä pöydän reunasta muutetaan.

punnuksen etäisyys pöydän reunasta R (cm)	kolikon etäisyys pöydän reunasta r (cm)
8,9	5,0
7,7	4,0
5,6	3,0
3,7	2,0
2,2	1,0

Tasapainoehdosta saatu yhtälö voidaan muokata muotoon

$$G_{\text{kolikko}} R = G_{\text{punnus}} r$$

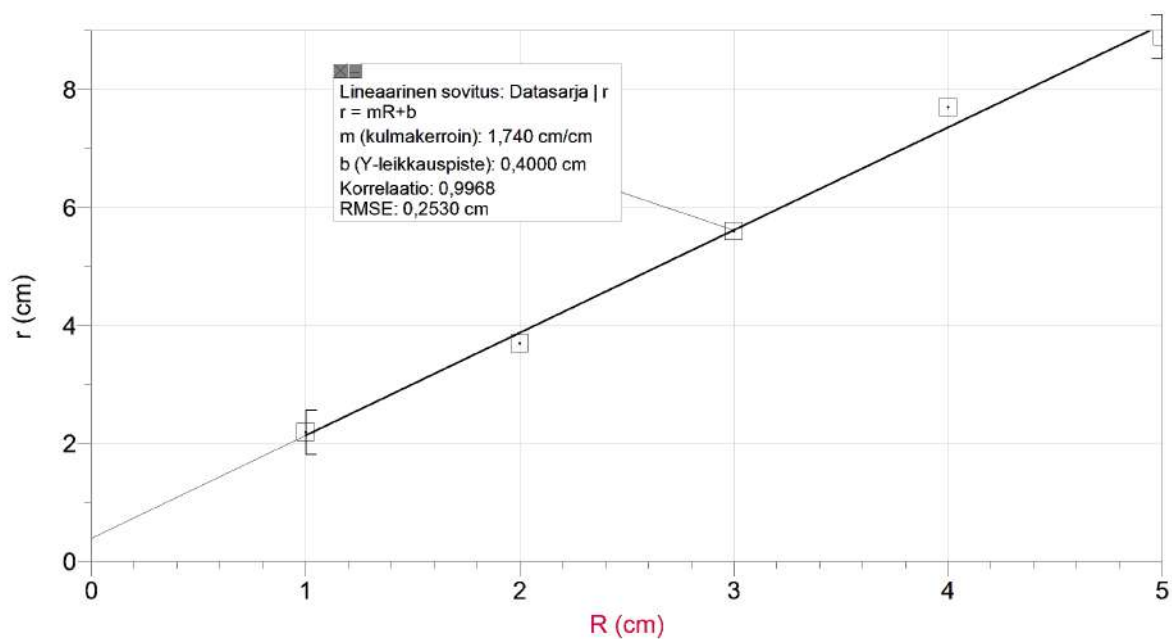
$$m_{\text{kolikko}} \cancel{g} R = m_{\text{punnus}} \cancel{g} r$$

$$r = \frac{m_{\text{kolikko}}}{m_{\text{punnus}}} R.$$

Kun mittaustuloksista laaditaan kuvaaja (R, r) -koordinaatistoon, pitäisi kuvaajan olla suora, jonka

$$k = \frac{m_{\text{kolikko}}}{m_{\text{punnus}}}.$$

kulmakerroin on



Kuvaajasuoran kulmakerroin on $k = 1,740$, joten kolikon massa on

$$m_{\text{kolikko}} = km_{\text{punnus}} = 1,740 \cdot 5,0 \text{ g} = 8,7 \text{ g}.$$

(Kirjallisuuden perusteella 2 euron kolikon massa on 8,5 g.)

Mittauksessa voimien varsiin liittyy epätarkkuutta. Kolikon ja punnuksen keskipisteen paikkaa oli vaikea määrittää tarkasti. Siksi etäisyyksissä voi helposti olla 1 mm:n virhe. Myös viivoittimen pitäminen oikealla kohdalla oli mittaustilanteessa haastavaa. Jos viivoitin liikahtaa pois paikalta, myös viivoittimen painon momentti vaikuttaa systeemin tasapainoon.

Vaihtoehtoisesti graafinen esitys voidaan laatia esimerkiksi siten, että vaaka-akselilla on kolikon etäisyys ja pystyakselilla on punnuksen etäisyyden ja punnuksen massan tulo. Tällöin kuvaajan pitäisi myös olla origon kautta kulkeva suora, jonka kulmakerroin on suoraan kysytty kolikon massa.

5. Vaunurata 15 p.

Herkkäliikkeinen vaunu liikkui vaunuradalla. Vaunuun oli kytketty radan suuntainen naru, jossa riippui punnus. Vaunun sisältämillä sensoreilla ja tietokoneohjelmalla mitattiin vaunun sijaintia, nopeutta, kiihtyvyyttä ja langan jännitysvoimaa.

Liitteenä on mittausaineisto ja video tutkittavasta ilmiöstä.

Aineisto

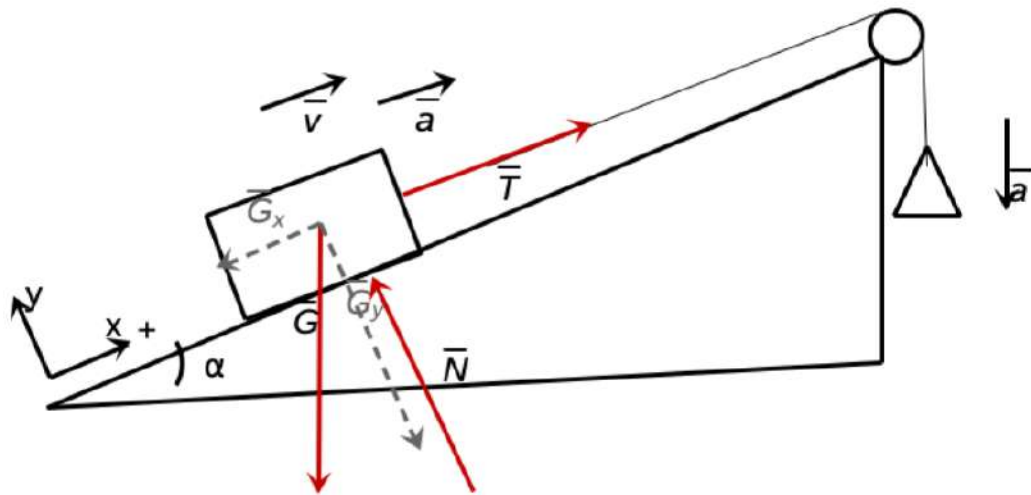
5.A Video: vaunurata

5.B Mittaustulokset: vaunurata

5.1 Valitse voimakuvioista sellainen, joka esittää parhaiten vaunuun kohdistuvia voimia hetkellä 2,0 s. Ilmanvastus ja vaunun renkaiden vierimisvastus oletetaan hyvin pieniksi. **2 p.**

RATKAISU:

)



KOMMENTTI: Yhdessä liikkuvat kytketyt kappaleet vaunu ja putoava punnus. Tarkastellaan vain vaunuun kohdistuvia voimia.

5.2 Nimeä edellisen kohdan voimakuvion voimat. 1 p.

T = langan jännitysvoima / langan tukivoima,

N = alustan / pinnan tukivoima

G = paino(voima) / gravitaatiovoima

Kommentti: Vetovoima on katsottu niin yleiseksi ilmaisuksi, että sitä ei ole hyväksytty (esim. langan vetovoima).

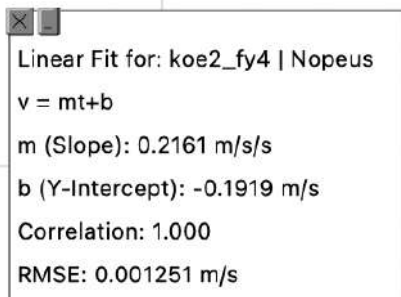
5.3 Kun vaunu liikkuu ylöspäin, ja punnus ei ole osunut vielä lattiaan, vaunun kiihtyvyys on noin 2 p.

0,2 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ✓

Perustelu:

Vaunu on kiihtyvässä liikkeessä kun punnus putoaa naruun kiinnitettynä kohti lattiaa. Kun punnus osuu lattiaan, vaunun liike muuttuu hidastuvaksi liikkeeksi.

Kiihtyvyys saadaan nopeuden kuvaajasta kulmakertoimena:

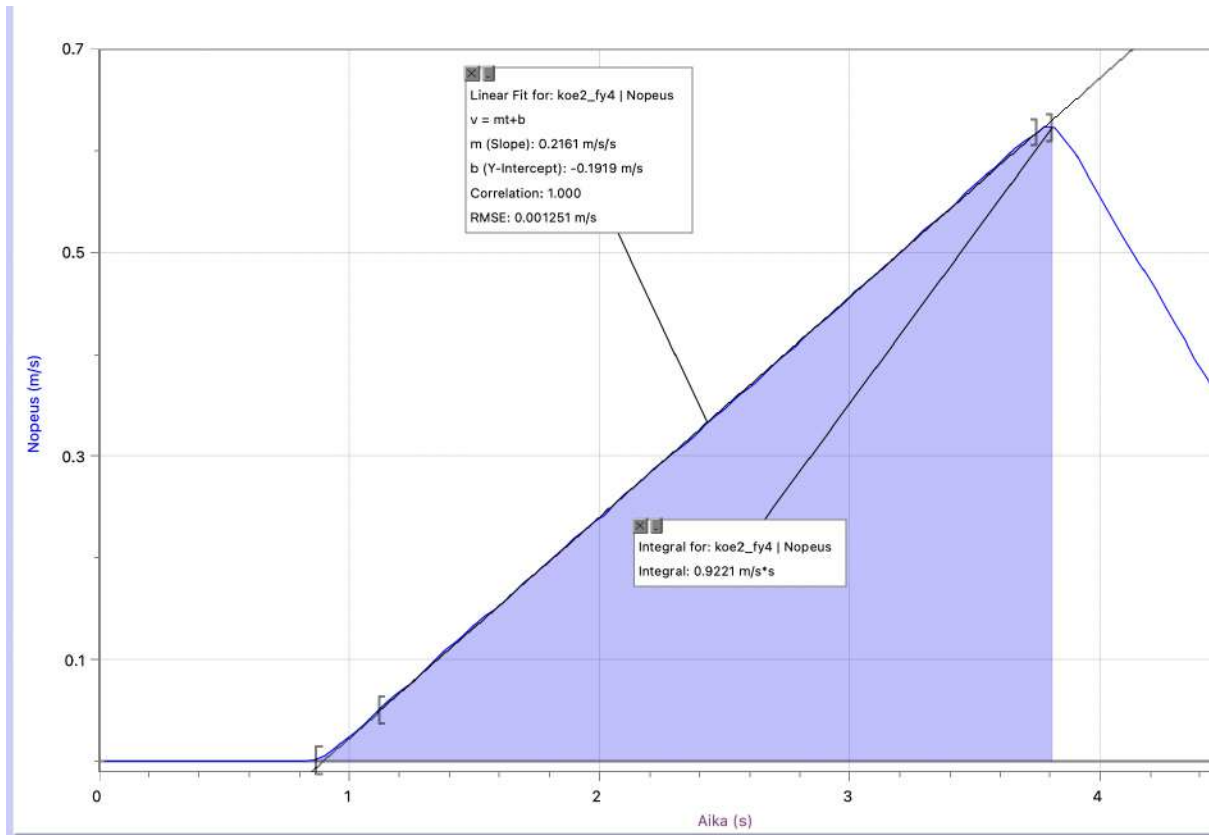


Vaihtoehdoista lähinnä nopeuden kuvaajan jyrkkyydestä saatua arvoa on 0,2 m/s².

5.4 Määritä sopivan graafisen esityksen avulla kuinka pitkän matkan punnus putoaa. Liitä kuvakaappaus graafisesta esityksestä vastaukseesi. 3 p.

RATKAISU:

Kuljettu matka saadaan (aika, nopeus)-kuvaajasta pinta-alana kiihdytystä vastaavalta aikaväliltä.



Tulos: 0,92 m eli 92 cm.

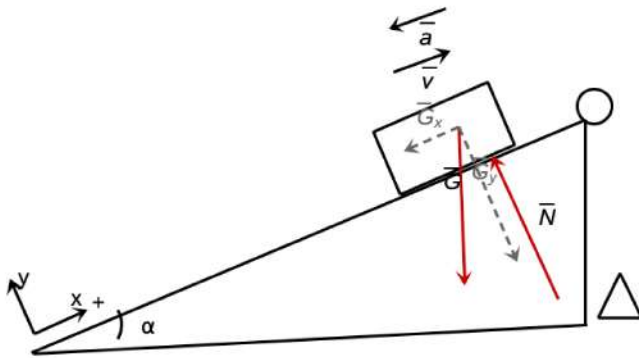
Hyväksytään myös paikan kuvaajasta määritetty siirtymä sekä keskinopeudesta tai kiihtyvyydestä laskemalla määritetty siirtymä. .

5.5 Tutki vaunun liikettä ja määritä laskemalla radan kaltevuuskulma vaakatason suhteen sekä vaunun massa. 7 p.

RATKAISU:

Kun punnus on lattialla, vaunu on hidastuvassa liikkeessä.

Voimakuvio:



Dynamiikan peruslain mukainen liikeyhtälö, kun punnus on jo lattialla:

$$\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}$$

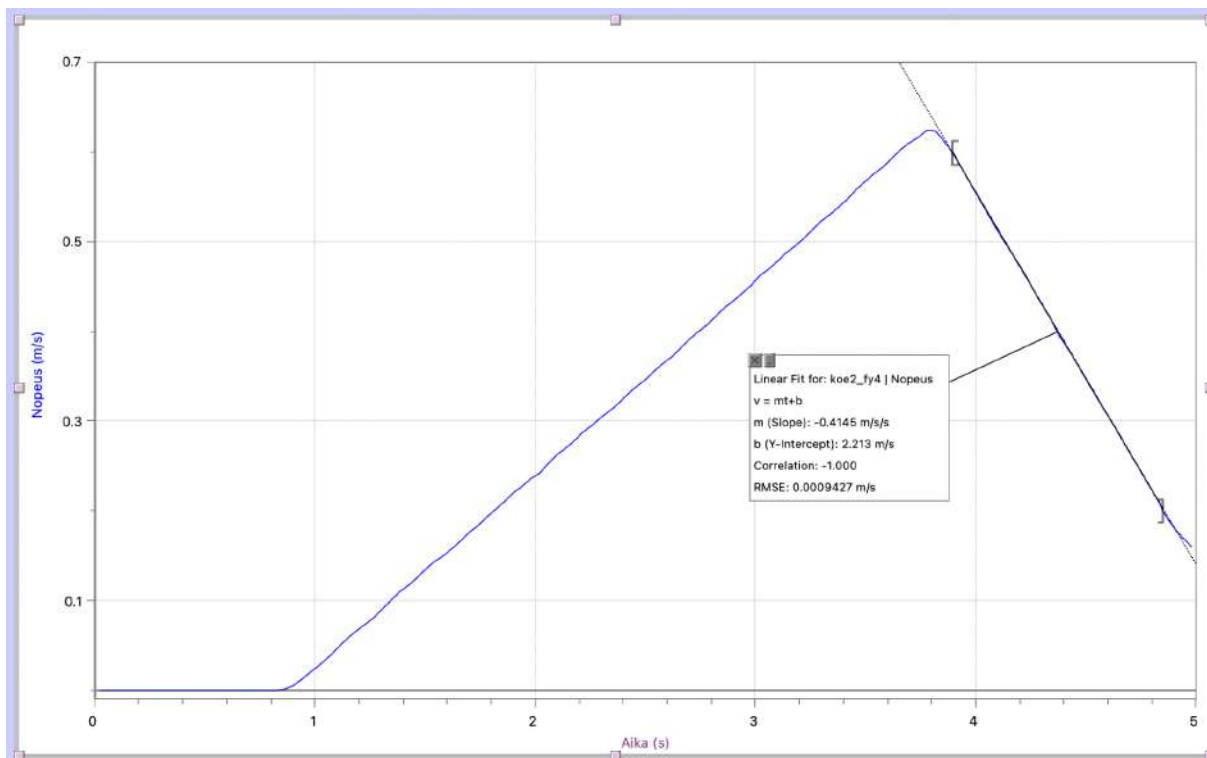
$$-G_x = ma \quad (\text{ja} \quad -G_y + N = 0)$$

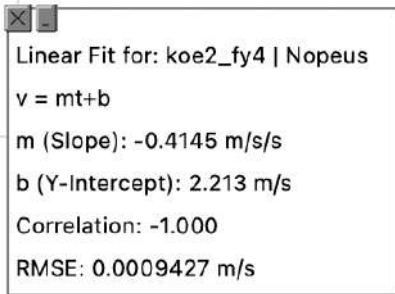
$$-mg \sin \alpha = ma$$

$$\sin \alpha = -\frac{a}{g}$$

$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{a}{g}\right)$$

Kiihtyvyys a saadaan nopeuden kuvaajasta kulmakertoimenä kohdasta, jossa kappale on hidastuvassa liikkeessä:





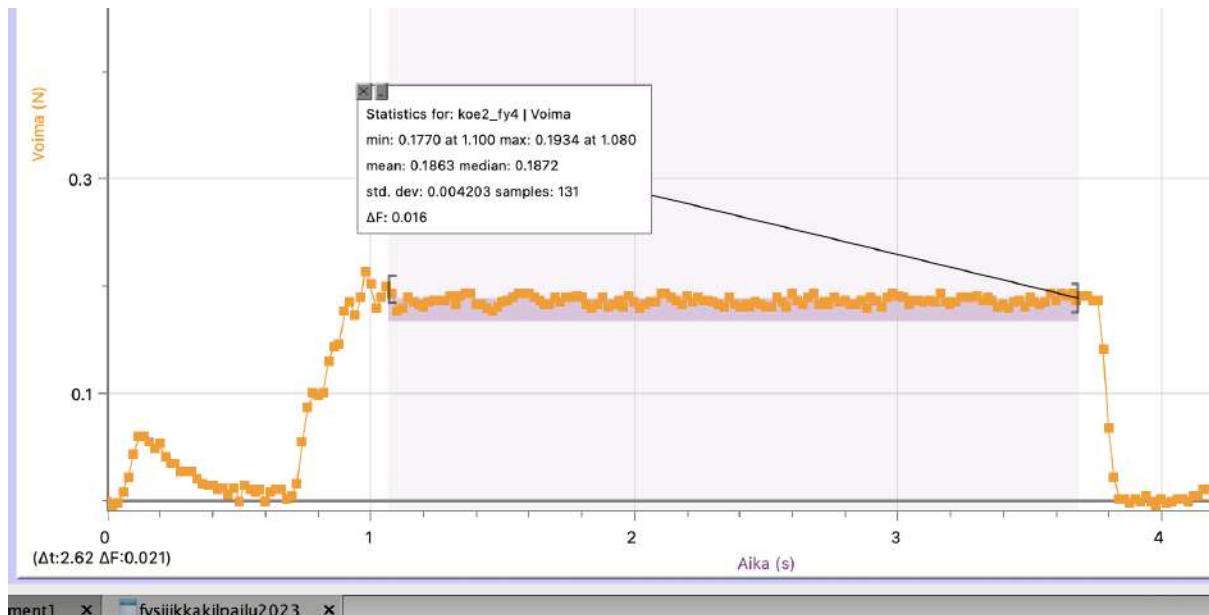
$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{0,4145 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right) \approx 2,4^\circ$$

Tulos: Radan kaltevuuskulma on noin $2,4^\circ$ astetta.

Kommentti:

Liikevastusvoimat ovat voineet pienentää kiihtyvyyttä a , jolloin kaltevuuskulma voi olla suurempi.

Vaunuun kohdistuva langan jännitysvoima T saadaan mittausdatasta esimerkiksi Logger Pron tilastotoiminnolla keskiarvona:



Dynamiikan peruslain mukainen liikeyhtälö punnuksen kiihdyttäessä vaunua:

$$\bar{G} + \bar{T} + \bar{N} = m\bar{a}$$

$$\begin{cases} T - G_x = ma \\ N - G_y = 0 \end{cases}$$

$$T - mg \sin \alpha = ma$$

$$m = \frac{T}{a + g \sin \alpha}$$

$$m = \frac{0,1863 \text{ N}}{0,2161 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{0,4145 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right)} \approx 0,295 \text{ 433 kg} \approx 0,30 \text{ kg}$$

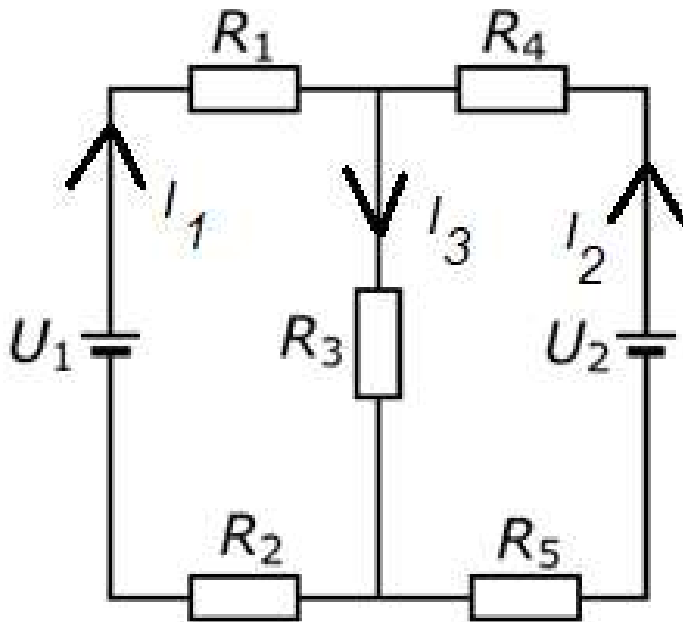
Tulos: Vaunun massa on 300 g.

T.6 Virtapiiri

Ratkaisu:

a)

Merkitään vasemmanpuoleisen jännitelähteen läpi kulkevaa virtaa I_1 :llä, keskimmäisen vastuksen läpi kulkevaa virtaa I_3 :lla ja oikeanpuoleisen jännitelähteen läpi kulkevaa virtaa I_2 :lla.



Tällöin Kirchhoffin laeista saadaan tarvittavat yhtälöt käyttämällä jännitelakia vasemmanpuoleiselle silmukalle ja oikeanpuoleiselle silmukalle sekä virtalakia. Jännitelain mukaisen yhtälön voi tehdä myös kiertämällä virtapiirin ulkokehän.

$$\begin{cases} U_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_1 R_2 = 0 \\ U_2 - I_2 R_4 - I_3 R_3 - I_2 R_5 = 0 \\ I_3 = I_1 + I_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan kahdesta jännitelain mukaisesta yhtälöstä virrat I_1 ja I_2 , ja sijoitetaan lausekkeet virtalain yhtälöön. Nyt kysytty sähkövirta I_3 on ainoa tuntematon ja se voidaan ratkaista.

$$I_1 = \frac{U_1 - I_3 R_3}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_2 - I_3 R_3}{R_4 + R_5}$$

$$I_3 = \frac{U_1(R_4 + R_5) + U_2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_4 + R_5) + R_3(R_1 + R_2 + R_4 + R_5)}$$

b)

Yhtälöt antavat sähkövirran suuruuden positiivisena, mikäli sähkövirran suunta on arvattu oikein. Jos sähkövirran suunta on arvattu väärin, sähkövirralle tulee negatiivinen lukuarvo. Tutkitaan seuraavaksi sähkövirtaa I_2 .

Selvitetään jännitteen raja asettamalla virta I_2 nolaksi ja ratkaisemalla jännite U_2 :

$$I_2 = 0$$

$$\frac{U_2 - I_3 R_3}{R_4 + R_5} = 0$$

$$U_2 = I_3 R_3$$

Sijoitetaan tähän I_3 :lle saatu yhtälö, jolloin U_2 :n lausekkeeksi saadaan:

$$U_2 = \frac{U_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

johon sijoittamalla tehtävänannon arvot saadaan jännitteen suuruudeksi noin $U_2 \approx 6,9$ A.