Origamiikka

ANASTASIA VLASOVA, Fysiikan maisteri, matemaattisten aineiden lehtori, Stadin ammattiopisto

Origamiikka-sana muodostuu yhdistämällä sanat origami (paperitaittelutaide) ja matematiikka. Eurooppalaisessa koulussa paperi on passiivisessa roolissa. Japanissa on toisin. Origamia käytetään geometrian oppimisessa leikki-iästä korkeakouluihin. Tässä artikkelissa tutustutaan kolmion ominaisuuksien tutkimiseen, kulman kolmiajakoon ja hämmästyttävään Hagan taitokseen.

Sana ”**origami**” koostuu kahdesta osasta: ”**ori**” (taittaa) ja ”**kami**” (paperi). Aikaisemmin Japanissa origami oli pyhien seremonioiden osa ja oli mahdollista vain eliitille. Origamista löytyy maininta 800-luvun asiakirjoista. Paperintaittelu tulee Eurooppaan 1400-luvulla. Ja 1800-luvun alussa saksalainen pedagogi Friedrich Fröbel ehdotti sen käyttöä päivähoidossa hienomotoriikan kehittämistä varten. Nykyisessä origamissa on sovitut symbolit, joiden avulla kirjoitetaan ohjeet origamiesineiden tekemiseen. Mutta myös ilman symbolien hallintaa pääsee tekemään mielenkiintoisia taitoksia ja tutkimaan geometriaa.

Perinteisessä origamissa paperin on oltava neliö. Nykyään yhä enemmän käytetään myös suorakulmioita 1 : 2 ja myös A4-arkkia.

Aloitan kolmiosta, sillä se on kaikenikäisille sopiva helppo tehtävä.

Kolmion ominaisuuksia

Jaetaan opiskelijoille erilaisia kolmioita. Todistetaan, että kolmion kulmien summa on 180°.

Tehtävä voidaan antaa usealla eri tavalla

- todista paperikolmion avulla, että kolmion kulmien summa on 180° – ehkä vaikein vaihtoehto.

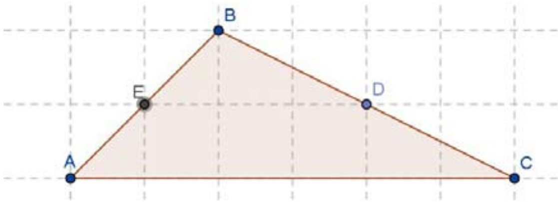
- taita kolmio suorakulmioksi, jonka pinta-ala on puolet kolmion pinta-alasta.

- taita kolmio niin, että kulmien kärjet kohtaavat jossain reunalla

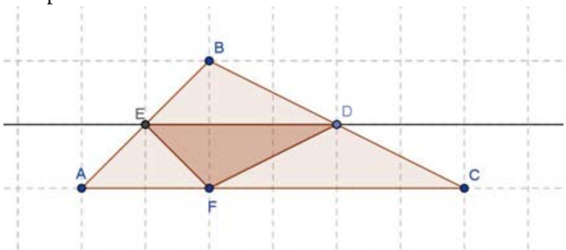
- Heikommille voi näyttää ratkaisun ja antaa opiskelijoille miettimään, miten voidaan selittää taitto-ohjeet niin, että kaikilla onnistuisi riippumatta kolmion muodosta.

1. Käännä kolmio niin, että suurin kulma olisi ylhäällä.

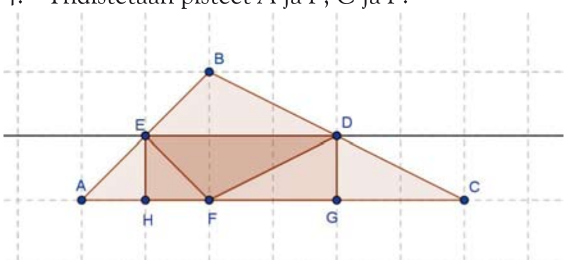
2. Tehdään taittamalla merkit kahden sivujen keskelle. (Taitetaan yhteen pisteet A ja B, merkataan taittamalla piste E. Toistetaan sivua BC varten.)



3. Taitetaan yläkulma alas kolmion keskiviivaa DE pitkin:



4. Yhdistetään pisteet A ja F, C ja F:



Seuraavaksi voidaan tehdä mielenkiintoisia havaintoja:

- Kulmat A, B, C taitettuna muodostavat oikokulman. Eli kolmion kulmien summa on 180°
- Suorakulmion $EDGH$ pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta.

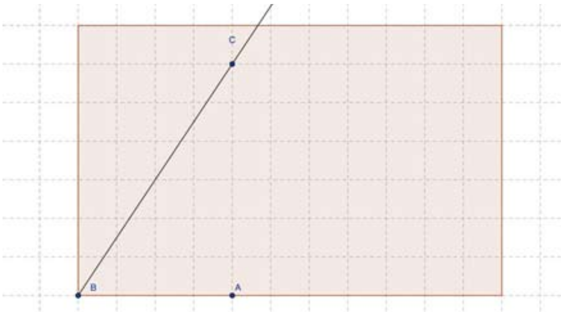
Muita tutkimusideoita: todista, että keskinormaalien leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä; tasakylkisessä kolmiossa kulmanpuolittaja, mediaani ja korkeus ovat sama jana.

Kulman kolmiajako

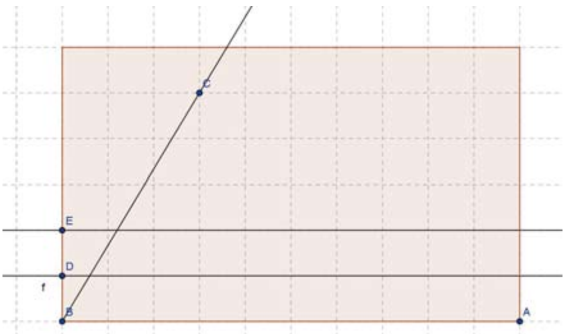
Kysymyksen, miten jaetaan kulma kahtia, ei pitäisi aiheuttaa ongelmia. Sama myös neljällä. Mutta jos pyydetään jakamaan kulma kolmeen samankokoiseen osaan? Tälle ongelmalle ei ole ratkaisua, jos saatavilla on vain harppi ja viivoitin. Mutta origamin avulla se on mahdollista.

Tee näin:

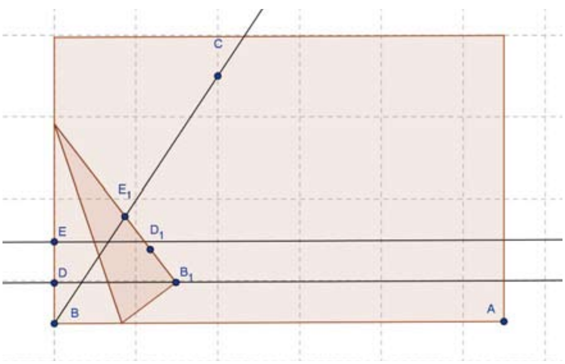
Erillisen paperiarkin yhdelle kulmalle piirretään terävä kulma *ABC*.



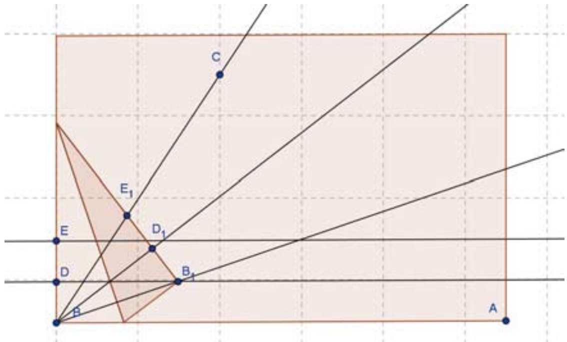
Taitetaan kaksi kertaa saman verran $BD = DE$.



Sitten hankalin vaihe: pitää taittaa vinoon niin, että piste B osuu suoralle f (saadaan piste B_1) ja piste E osuu puolisuoralle BC (piste E_1)



Pisteiden E_1 ja B_1 keskelle tulee D_1. Taitetaan paperi puolisuoraa BD_1 pitkin. Se leikkaa kolmasosan kulmasta ABC. Lopuksi taitetaan puolisuoraa BB_1 pitkin.



Sen pituinen se.

Hagan ihmeellinen taitos

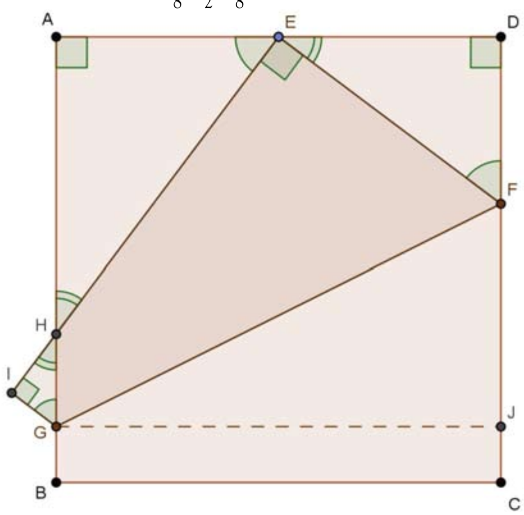
Käytetään neliötä, joka on origamin perusmuoto. Taitetaan yläsivu kahtia niin, että merkataan siihen vain keskipiste. Avataan neliö takaisin. Yhdistetään oikea alakulma ja yläsivun keskipiste. Saatiin epäsymmetrinen taitos (ks. kuva). Sovitaan neliön sivun olevan yhtä suuri kuin 1. Nyt voidaan laskea kolmion ΔDEF sivujen pituudet. Oletetaan, että $DF = a$. Siten $FC = 1 - a$. Taitettiin niin, että $FE = FC$, siksi $FE = 1 - a$. $DE = 1/2$, koska E on keskipiste.

Pythagoraan lauseen mukaan: $(1-a)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Ratkaistaan: $a = \frac{3}{8}$. Tästä $DF = \frac{3}{8}$ ja $FE = 1 - a = \frac{5}{8}$.

Oikea sivu on jaettu suhteessa 3 : 5.

Kolmion ΔDEF sivujen suhde:
$DF : DE : EF = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5$.



Kirvesmiehen kolmikko!

Mietitään kolmiosta ΔAHE. Kulma $\sphericalangle HEF = 90°$ (sama kuin kulma C), $\sphericalangle FED + \sphericalangle AEH = 90°$, saadaan, että kolmiot DEF ja AHE ovat yhdenmuotoiset (kolme samankokoista kulmaa).

Yhdenmuotoisuudesta:

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AH} \text{ eli } \frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : AH, \text{ tästä } AH = \frac{2}{3}.$$

Yllättävä ja hyödyllinen havainto: piste H jakaa sivun AB suhteessa 2 : 1. Saatiin helppo tapa sivun kolmiajaolle.

Lasketaan sivu EH: $\frac{DF}{EF} = \frac{AE}{EH}$, eli $\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = \frac{1}{2} : EH$. Tästä $EH = \frac{5}{6}$.

Kuvassa jää tutkittavaksi kolmio ΔHIG. Ottaen huomioon, että ristikulmat $\sphericalangle EHA = \sphericalangle IHG$, kolmiot AHE ja HIG ovat yhdenmuotoiset. Taas sivujen suhde on 3 : 4 : 5. Kolmion ΔHIG sivujen pituudeksi saadaan:

$$HI = \frac{1}{6}, GI = \frac{1}{8}, GH = \frac{5}{24}.$$

Lopuksi lasketaan janan FG pituus. Kuvitellaan suora $GJ \,||\, BC$. Kolmio FGJ on suorakulmainen.

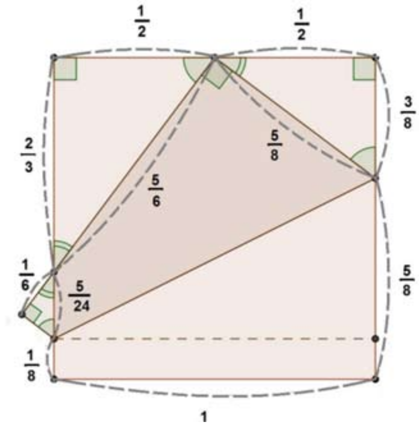
$$GI = JC = \frac{1}{8}, JF = CF - CJ = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Pythagoraan lauseen avulla saadaan $FG = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Olisiko tästä sopiva kertaustunti lukiolaisille tai vahvoille peruskoululaisille: yksi taitos ja Pythagoraan lause, yhdenmuotoisuus, suhteen ratkaisu, murtoluvut!

Yhteenvetona:

Hagan ensimmäinen lause: Yhdistäen neliön alakulma ja sen yläsivun keskipiste saadaan, että:



1) oikea sivu on jaettu pisteellä F suhteessa 3 : 5;

2) vasen sivu on jaettu pisteellä H suhteessa 2 : 1;

3) vasen sivu on jaettu pisteellä G suhteessa 7 : 1;

4) alin sivu on jaettu pisteellä H suhteessa 1 : 5;

Suhteet 1) ja 3) voi saada taitamalla sivuja kahtia kolme kertaa, mutta suhteita 2) ja 4) ei voi saada näin. Siksi Hagan ensimmäinen taitos on helppo, yksinkertainen ja tarkka menetelmä janan jakamiseen ylämainituilla suhteilla. Onpa herkullista! ■