

Seiskaluokan yhtälöt

HANNU KORHONEN, lehtori ja TUULA KONTU, lehtori; Jokivarren koulu, Orimattila

Artikkeli sisältää suunnitelman siitä, mitä yhtälöistä olisi opettava perusopetuksen seitsemännellä luokalla, miten se olisi tehtävä, mihin päämääriin ja tavoitteisiin pyritään sekä ennen kaikkea perustelut sille, miksi suunnitelma soveltuisi erityisen hyvin tämän ajan suomalaiseen perusopetukseen.

Ratkaisu perustuu kahden aineopettajan kokemuksiin perusopetuksen 5 – 9 luokkien opettamisesta sekä opetuksen suunnittelun ja kunnallisen opetussuunnitelman tekemisen yhteydessä käytyihin keskusteluihin. Kummassakin yhteydessä on erityisesti pohdisteltu siirtymävaihetta, jota aikaisemmin kutsuttiin kuudennen ja seitsemännen luokan niveleksi.

Lähtökohdat

Opetuksen toteutus perustuu koulun organisatorisiin ryhmittelyratkaisuihin, opettajan didaktiseen näkemykseen ja käytössä oleviin oppi- ja muihin materiaaleihin. Tässä tapauksessa kyseessä on yhtenäinen 0 – 9 peruskoulu, jossa matematiikkaa opetetaan pääosin heterogeenisissa opetusryhmissä siten, että yleisopetuksen ryhmiin on integroitu erityisoppilaita ja mukautetun opetussuunnitelman mukaan opiskelevia oppilaita. Aineopettajilla on välistä mahdollisuus aloittaa matematiikan opettaminen jo viidenneltä luokalta.

Opettajan didaktinen näkemys muodostuu ensiksi aineosaamisesta, toisin sanoen sen tietämisestä, mitä on tärkeää opettaa ja miksi se on tärkeää kokonaisuuden muodostumisen kannalta. Toiseksi ja yhtä tärkeää on oppilaiden ke-

hitysvaiheen ja ajattelun kehittymisen tunteminen. Perusopetuksen yläluokilla erityisen merkittävää on oppilaiden ajattelun kehittyminen konkreetista kohti abstraktia ajattelua: miten oppilas oppii ja mitä hän milloinkin pystyy oppimaan. Kolmanneksi tähän liittyy vielä yhtäältä erityislahjakkuuden ja toisaalta oppimisvaikeuksien havaitseminen ja diagnosointi.

Neljänneksi tulee opetusmenetelmien tunteminen ja käytön hallinta. Tämä useinkin vasta ratkaisee opettamisen onnistumisen. Erityisen merkittäviä tekijöitä ovat opetusmenetelmien monipuolisuus sekä positiivisen ilmapiirin luominen ja muut opettajan sosiaaliset taidot, joilla ryhmä saadaan toimimaan sekä yhdessä toisiaan tukien että kukin opiskelija erikseen. Positiivinen ilmapiiri ei kuitenkaan ole yksinomaan tai ei ehkä edes valtaosalta kiinni yksinomaan sosiaalisista taidoista, vaan myös siitä, että tavoitteet asetetaan oppilaille sopiviksi, viime kädessä sopiviksi vastaamaan kunkin oppilaan edellytyksiä. Käytännössä tämä on kahdenkymmenen oppilaan heterogeenisessä ryhmässä lähes mahdollon vaatimus viimeistään kahdeksannelta luokalta lähtien.

Seiskan yhtälötavoitteet

Oppilaan ajattelun taso ja oppimisen taidot kehittyvät kovasti yläluokkien aikana. Siksi seitsemännen luokan tavoitetaso on olennaisesti erilainen kuin yhdeksännen luokan päättötaso. Erityisesti abstrakteissa asioissa vasta rakennetaan niitä konkreettisia kokemuksia, joiden varaan yleistykset voivat perustua. Yhtälöiden koh-

dalla tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että seiskaluokalla yhtälöiden opettamisessa ei pyritä vielä yleistyksiin eikä muodollisten ratkaisumenetelmien opettamiseen. Yhtälöt eivät itse asiassa ole edes itsenäisen osa-alueen asemassa, vaan niitä opetetaan siltä osin kuin ne tukevat lukukäsittelyn syventämistä, laskutaitojen harjoittelua sekä muuttujan ja funktion käsitteiden oppimisen pohjaksi tarvittavien konkreettisten kokemusten hankkimista.

Yhtälö tarvitsee vastaavasti pohjakseen aikaisempia konkreetteja kokemuksia. Ala-luokilla niitä ovat esimerkiksi tuntemattoman yhteenlaskettavan tai tekijän etsiminen. Kirjainta x kyllä käytetään alaluokilla, mutta enemmänkin "vastauksen" eli lausekkeen arvon eikä niinkään muuttujan merkinä (kuva 1, ylin rivi). Yhtäsuuruusmerkistä tulee oppilaan mielessä laskemiseen kehottava operaatiomerkki eikä ekvivalenssimerkki. Tutkimusten mukaan tämä on yleinen virhekäsitys (ks.

$$\begin{array}{l} 9 + 3 = x \\ 9 + 3 = 12 \\ \square + 3 = 12 \\ x + 3 = 12 \\ x + 3 = 5 + 7 \end{array}$$

Kuva 1. Alaluokilla käytettäväksi sopivia yhtälön näköisiä merkintöjä. Niistä vain alin johtaa tehokkaasti yhtälön oppimista tukevien ajattelutapojen kehittymiseen.

esimerkiksi Korhonen 1990, 24). Vastaavasti x merkitsee enemmän tiettyä vastausta kuin etsittävä muuttujan arvoa. Tästä on seurausena, että pelkästä yhtälöitä näyttävästä merkinnästä ei synny asiaa eteenpäin vieviä mielikuvia. Tarvitaan myös ajatteluprosesseja tai "laskuja", jotka ovat samantaisia kuin yhtälöiden yhteydessä käytettävät. Näitä sisältyy luvun hajoitelmien rakentamiseen (kuva 1, alin rivi).

Muuttujan käsitteeseen voidaan 5. – 6. luokilla johdatella myös funktiokone-ajattelun avulla. Tämä harjoitus kulkee yksinkertaisimmillaan niin, että opettaja antaa funktiokoneeseen syötetävän luvun ja ulostulevan luvun. Oppilaiden tehtävänä on keksiä sääntö, jonka mukaan kone toimii. Viidennellä tai viimeistään kuudennella luokalla sääntö ilmaistaan kuvaamalla tarvittavat laskutoimitukset sanoin. Se voidaan kirjoittaa myös muuttujan lausekkeena, esimerkiksi $2 \cdot x + 3$. Seiskaluokan yhtälöiden käsittely on omiaan tukemaan myös muuttujan käsitteen rakentumista. Yhtälön käsitteen monipuolistumista tukee myös tasapainoon saatettavan vaa'an ajattelemisen, myös siinä abstraktissa muodossa, että vaa'an eri puolilla on numeroin merkittyjen lukujen ohella karhu-

ja, kukkia tai geometrisia kuvioita (kuva 2).

Mielikuvista laskemiseen

Hyvä testi tarkistaa, onko asiat opittu seiskalla riittävän konkreettisesti ja perusteellisesti oppilaan oman ajattelun tasolla, on pyytää heitä kasilla ratkaisemaan muutamia yksinkertaisia yhtälöitä:

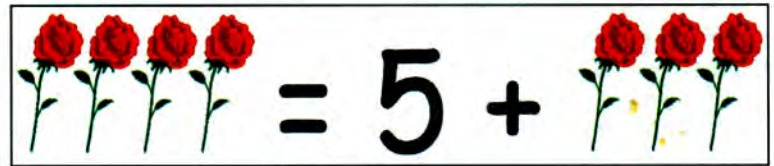
$$7x = 77, \quad 1 \\ x + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{4},$$

$$0,2 \cdot x + 1 = 2,2.$$

Jos vastaus on, että "en muista", niin opetus ja sen synnyttämät mielikuvat eivät ole olleet riittävän konkreettisia tavoittaakseen oppilaan käsityskyvyn ja painuakseen siis mieleen. - Kehitystason herkkää havainnoimista auttaa myös sen tietäminen, että jo seiskalla ajattelun tason erot ovat niin suuret, että parhaat oppilaat huomaavat itse tai ainakin oppikirjan tukemina ilman, että opettaja ottaa asian esille, yhtälön muodollisen ratkaisuperiaatteen idean ja osaavat ja haluavat sitä käyttää;

siis saman luvun lisäämisen yhtälön kummallekin puolelle jne. Näitäkin oppilaita pitää pystyä tukemaan heidän omassa ajattelussaan.

Seiskalla on vielä paljon oppilaita, joille konkreetit yhtälötehtävät, rahat, kanit ja porkkanat, eivät tuota mitään ongelmia, mutta x :n kanssa kirjoitettu yhtälö ei vielä avaudu ollenkaan. Mitä tällöin pitäisi tehdä? Antaako vain oppilaalle aikaa kehittyä ja palata asiaan seuraavana vuonna? Ulkoa opitut mekaaniset säännöt eivät kuitenkaan tunnu painuvan mieleen. Seuraavana vuonna niitä ei kuitenkaan enää muisteta. Miksi siis tehdä turhaa työtä. Tämä takana on arvataksemme se, että oppilaan ajattelu on vielä niin konkreettista, että abstrakti symbolimerkintä ei ala elää ollenkaan oppilaan ajattelussa. Tätä voitaisiin ehkä tukea niin, että aikaisemmin, jo viidennellä ja kuudennella luokalla laskutoimitusten ominaisuuksien perusteella ja kokeilemalla ratkaistuista lukutehtävistä



Kuva 2. Ruusuyhtälö.

pyritään kirjoittamaan $x:n$ lauseke tai yhtälö.

Yhtälöillä on keskeinen merkitys seiskaluokalla myös siinä, että ne tukevat voimakkaasti lukukäsitteen vahvistumista ja syventymistä ja laskutaitojen varmistumista. Erityisen tärkeässä asemassa ovat desimaali- ja murtoluvut. Pitää vain muistaa pysytellä drillaaamisessa järkevällä tasolla. Tärkeitä ovat aivan perusasiat:

$$x + \frac{1}{2} = 2,$$

$$\frac{1}{2}x = 26,$$

$$0,5x = 5 \text{ jne.}$$

Monimutkaisemmissa laskuissa, kuten ”mikä luku on kolmasosa luvusta $2\frac{3}{4}$ ”, annetaan useimpien oppilaiden turvautua laskimeen.

Tällä kohdalla käytettiin lasku- harjoittelussa olennaisesti oppikirjan tehtäviä strukturoidumpia harjoituksia. Tätä tarvitaan yhtäältä siihen, että asia etenee laskuissa järjestelmällisesti ja riittävän pienin askelin, sekä toisaalta siihen, että tehtävät antavat mahdollisuuden myös oppilaiden edellytysten mukaiseen ryhmän sisäiseen eriyttämiseen. Sarjat ovat nähtävissä verkossa Jokivarren koulun kotisivulla osoitteessa

<http://www.orimattila.fi/koulut/jokivarrenkoulu/matematiikka/yhtalot.php>

Tavoitteemme ja opetussuunnitelman perusteet

Opetussuunnitelman perusteissa tavoitteet ja sisällöt on esitetty yhdessä vuosiluokille 5 – 9. Oppilaiden ajattelun kehittämisessä on kuitenkin niin paljon yhteisiä keskimääräisiä piirteitä, että ainakin abstraktisuudeltaan nopeasti etenevät osa-alueet kuten yhtälöt ja yleensä algebra olisi kuvattava myös vuosiluokittain. Tällaisenaan opetussuunnitelman perusteet eivät anna riittävää tukea koulukohtaisen opetussuunnitelman tekemiseen eivätkä koulusta toiseen siirtyvän oppilaan taitojen varmentamiseen.

Lisäksi on pelättävissä, että nykyisellään päättövaiheen osaamisen kriteerit heijastuvat opetuksen suunnitteluun ja suoritusvaatimukseen seiskaluokalle asti. Tämä ei kuitenkaan voi eikä saa olla tarkoitus. Käsitteiden ja taitojen oppiminen on ihan eri ja erilainen vaihe kuin taitojen testaaminen. Pahin virhe yhtälöiden kohdalla on, että siirrytään liian nopeasti muodollisten sievennyssääntöjen

käyttöön ja vaatimiseen niin, että käsitteen muodostukselle ja haltuunotolle ei jää aikaa.

Seiskalle asettamamme tavoitteet merkitsevät siis sitä, että yhtälöt eivät vielä seitsemännellä luokalla ole itsenäisen sisältöalueen asemassa, vaan niillä tuetaan lukukäsitteen kehittymistä ja laskutaitojen varmentamista sekä pyritään antamaan algebrassa, funktio-opissa ja yhtälöissä tarvittavia konkreettisia kokemuksia. Samalla oppilaat saavat aikaa yhtälön käsitteen muotoutumiseen.

Oppilaan mielessä voivat elää samanaikaisesti monet erilaiset mallit ja ajattelutavat vaaosta ja rasioista vaa'an kautta käänteisiin laskutoimituksiin. Tästä on pieni askel luvun lisäämiseen tai vähentämiseen yhtälön molemmille puolille eli siis yhtälön muodollisen ratkaisemiseen ensi askeliin. Se askel on sallittava niiden oppilaiden ottaa, jotka siihen kykenevät, mutta sitä ei ole vaadittava kaikilta seiskaluokalla.

Lisää luettavaa:

Korhonen H. (1990). Yhtälöiden opettaminen. Julkaisussa Kupari, P. ja Korhonen H. Ymmärrystä yhtälöiden oppimiseen, 20–29. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B, teoriaa ja käytäntöä 54. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.