

Seiskan nivel laskennosta algebraan

HANNU KORHONEN, lehtori; Erkko-lukio, Orimattila

Oppilaan oppiminen ja ajattelu on jatkuva. Oppimisen ongelmalliset nivelkohdat, joista kovasti puhutaan sekä perusopetuksen alaja yläluokkien että perusopetuksen ja lukion välillä, ovat osoitus heikosta tai puutteellisen suunnittelusta tai kokonaisnäkömyksen puutteesta opetussuunnitelman ja oppimateriaalin laatimisessa.

Opettajan on kuitenkin opetuksessaan mahdollista ennakoida tulevat vaikeudet ja antaa oppilaille etukäteen sellaisia kokemuksia ja valmiuksia, joihin käsitteiden abstrakti määrittely voi myöhemmin perustua. Se edellyttää vain pitkän aikavälin tavoitteiden, ns. matematiikan punaisten lankojen tuntemista sekä käsitteenmuodostuksen apuvälineiden tarkoituksenmukaista käyttöä. Tässä samoin kuin tukiopetuksen antamisessa ennakointi on tehokkaampaa kuin virheiden paikkailu ongelmien jo ilmettyä.

Matematiikan osaaminen

Matematiikan oppimistulosten tason laskeminen ja osaamisen puutteellisuus ovat jatkuvan valituksen aihe. Kuitenkin kansainväliset vertailut osoittavat suomalaisten oppilaiden menestyvän hyvin tai ainakin OECD-maiden keskitason mukaisesti (esimerkiksi Kupari ym. 2001, 4).

Vastaavasti kansalliset arvioinnit osoittavat suurimman osan oppilaista suoriutuvan kunnolla perusopetuksen matematiikan opinnoistaan, vaikka melkoisella osalla on puutteita tiedoissaan (Mattila 2002, 46). Algebra tuntuu erityisesti huolelta (Tarvainen 2003).

Algebran, mutta muutenkin laskutaitojen osalta sitä niitetään, mitä on kylvetty. Ei opetussuunnitelmassa eikä siten myöskään oppimateriaalissa ole varattu aikaa ideoiden ymmärtämiseen ja laskutaitojen harjaanuttamiseen, vaan kouluvuoden työaika täyttyy määritellyistä sisällöistä ja asia etenee kirjassa aukema tunnissa -periaatteella. Lisäksi pelottavan usein ohitetaan oppimisen konkreetit alkuvaiheet ja annetaan oppilaiden edetä ”helposti”, ulkoa opittavien sääntöjen varassa tarjoamattakaan mahdollisuutta todelliseen ymmärtämiseen ja osaamiseen.

Kuitenkin paljon on sellaista, mitä kuka tahansa opettaja voi tehdä ilman kohtuuttomia ponnituksia. Tässä on kaksi isoa asiaa: käsitteiden opettaminen (pelkän nimeämisen ja määrittelyn asemesta) ja opittujen taitojen harjaanuttaminen.

Päässälaskua ja malleja

Helpoimpia taitojen varmistamisen ja ylläpitämisen tapoja on säännöllinen päässälaskujen laskeminen. Se voidaan tehdä monella tavalla, mutta omien 5–7 -luokkalaisten kanssa olen toiminut seuraavasti. Jokaisen tunnin alussa on lyhyt päässälaskutuokio: viisi laskua, joiden tasoitetaso on neljä oikein viidestä keskimäärin. Välillä mennään pari kierrosta läpi luokan niin, että kukin oppilas keksii sarjan vuorollaan, välillä tehtävät ovat opettajan tekemiä.

Aiheet vaihtelevat aikaisemmin opitusta juuri varmennettavina oleviin laskutaitoihin. Erityisesti laskujärjestyksellä, nollalla kertomisella ja muilla sellaisilla ki-

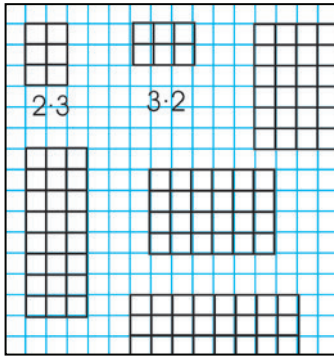
koilla oppilaat pystyvät luomaan mahdolltomilta näyttäviä tehtäviä, joihin kuitenkin on ymmärtävälle helppo ja suoraviivainen ratkaisu.

Tehtävät kirjoitetaan tauluun yksi kerrallaan. Tehtävien tekijä kirjoittaa lopuksi vastaukset näkyviin ja oppilaat laskevat itselleen pistemäärän. Sen jälkeen tarkastetaan, että vastaukset ovat oikein ja lasketaan näkyviin ne tehtävät, joita joku ei ole osannut tai jonka vastaus asetetaan kyseenalaiseksi. Oikeasta vastauksesta keskusteleminen on usein jakson parasta antia, vaikka tavoitteena on oikeasti harjoitella päässälaskemista. Oheistuloksina oppilaat oppivat näkemään, mitä muut osaavat, ja tarkkailemaan toisten työskentelyn edistymistä sekä tietysti luokan edessä esiintymistä ja taululle kirjoittamista. Lopuksi piirretään histogrammi tuloksesta.

Toinen iso asia on mallien järjestelmällinen ja suunnitelmallinen käyttö. Yhtäältä tarvitaan monipuolisia malleja. Esimerkiksi nelilukujen mallina voidaan käyttää aluksi värinappeja, sitten nelilölaattoja, multilinkkejä ja lopuksi ruutupaperille piirrettyä pinta-alamallia. Mallien käytössä on tärkeää monipuolisuus, jatkuvuus ja harkittu järjestelmällisyys. Pinta-alamalli ei tule oppilasta vastaan ensimmäistä kertaa, vaan sitä on käytetty aikaisemmin sekä kertolaskun että pinta-alan käsitteen opettamisessa.

Pinta-alamalli kertolaskussa

Se sopii myös hyvin kertolaskun laskulakien havainnollistamiseen, jos kiinnitetään huomiota vaaka- ja pystysuunnan järjestykseen ja



Kuva 1.

tekijöihinjakoon. Mallin ainoa tehtävä ei suinkaan ole olla käsitteen oppimisen apuna ja tukena, vaan sen avulla on myös mahdollista laatia monipuolisia harjoitteita, jotka yhdistelevät matematiikan osa-alueiden taitoja (kuva 1). Vastaavalla tavalla murtolukujen kertolaskun havainnollistaminen pinta-alamallilla ei tähtää vain kertolaskuun, vaan siitä mitataan hyötyä vielä lukion todennäköisyyslaskennassakin toistokokeen (kertolaskusäännön) mallina.

Murtokakku kertaamisessa

Seitsemännen luokan alussa murtolukujen laskutaidot ovat vielä niin epävarmat, että on aihetta tuntea mallin käyttöön asioita kerrattaessakin. Supistamisen, laven-tamisen ja yhteenlaskun perusmie-likuva palautuu mieleen varmin-min murtokakuilla. Piirtoheitin-malli on kätevä (kuva 2), mutta yh-teisessä keskustelussa toimii apuna yhtä hyvin tarra- tai magneetti-malli. Se on korvaamaton myös murtolukujen jakolaskun peruste-lemisessä sisältöjaon avulla. Tämä-kin on niitä asioita, joiden opetta-misessa yleensä siirrytään aivan lii-an nopeasti konkreettista vaiheesta abstraktin säännön avulla työsken-telyyn.

Voisi tietysti kysyä, eikö murto-lukujen jakolaskun ymmärtämis-vaiheen voisi ohittaa kokonaan ja

jättää laskut laskimella lasketta-viksi. Sovellustehtävien kannalta niin ehkä voisikin tehdä, mutta ongelma on toisaalla. Tähän per-usmielikuvaan perustuu sisältö-ja ositusjaon sekä murtoluvun kä-sitteiden yhtenäistyminen yhdeksi jakolaskuksi ja sen varaan raken-tuu myöhemmin murtolausekkei-den jakolasku.

Usein tehdään se suuri virhe, että algebra ajatellaan vain muo-dollisten sääntöjen varassa suori-tettaviksi operaatioiksi. Algebran – kirjainlaskennan – perusasioiden osaaminen perustuu kuitenkin ko-ko ikäluokan opettamisessa konk-reettisiin mielikuviin samoin kuin mitkä tahansa muut laskutoimi-tukset: saman muotoisten termien yhdistäminen, ensimmäisen, toi-sen ja kolmannen asteen termien pitäminen erillään, ensimmäisten asteen termien kertominen keske-nään, ensimmäisen ja toisen as-teen termien kertominen jne.

Mallin yleistäminen

Neliö- ja kuutioluvut voidaan hy-vin opettaa jo viidennellä luokal-la. Silloin niiden merkitys on en-sisijaisesti kertolaskun sekä pinta-alan ja tilavuuden laskuharjoitte-lun monipuolistamisessa. Tähtäin on kuitenkin paljon kauempana. Viimeistään kuudennella luokalla opetetaan jo neliö- ja kuutioluvun merkintä: 4^2 ja 4^3 . Tässä vaiheessa ei vielä puhuta potenssista mitään, mutta merkinnän käyttöä voidaan harjoitella. Yläindeksimerkintä ei suinkaan ole uusi, sillä si-tä on käytetty pinta-alan ja tilavuuden yksiköissä jo paljon aikaisemmin. Jos oppilaat ovat vä-hänkin tottuneet mate-maattisten käsitteiden määrittelyyn ja sillä lei-kittelyyn, niin neliöluvun käsite yleistyy helposti

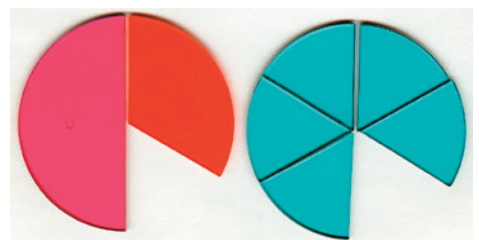
”ysiölukuihin” asti. Ysiöluuku 99 on suurin luku, joka voidaan merkitä kahdella numeromerkillä. Jos täl-laista leikkimistä luvuilla ei har-rasteta, niin neliö- ja kuutioluku-jen merkintä kannattaa yleistää ainakin tietynlaisen kertolaskun lyhennysmerkinnäksi viimeistään seiskaluokan alun kertausvaihees-sa. Silloin saadaan lyhyet merkin-nät isoille luvuille miljoona, mil-jardi, biljoona jne sekä taas erilai-nen tapa keksi uusia harjoitteita.

Pitkäjänteisyyttä opetukseen

Edellä kerrottu on esimerkki pitkä-jänteisestä käsitteen rakentamisesta. Ensin opitaan asia yksinkertai-sessa ja konkreettisessa tilantees-sa viidennellä luokalla. Sitten sille muodollinen merkintä kuudennel-la luokalla. Mahdollisesti voidaan tarvita myös ala-indeksimerkintää, jos käsitellään kaksi- tai kolmi-järjestelmän lukuja. Vielä miljoonia ja miljardeja merkittäessäkään seitsemännen luokan syksyllä ei puhuta potensseista, vaan siitä, et-tä yläindeksi ilmoittaa samanko-koisten tekijöiden lukumäärän.

Vasta algebraa aloiteltaessa seit-semännen luokan talvella otetaan käyttöön nimitykset potenssi, kan-taluku, eksponentti jne. Silloin itse käsite on jo tuttu eikä sen käyt-tö algebrassa muodosta mitään yli-määräistä kynnystä eikä kukaan kysy, mihin tätä algebraa tarvitaan.

Jos mallien käytöstä halutaan tu-kea ymmärtämiselle algebraa aloi-



Kuva 2.

tettaessa, voitaisiin ajatella, että seitsemännellä luokalla ei edettäisi pitemmälle kuin sellaisiin laskuihin, jotka voidaan laskea mallin avulla. Tämä merkitsisi siis enintään kolmannen asteen termien käyttämistä seitsemännen luokan algebran laskuissa. Silloin pärjätäisiin hyvin tikuilla, pinta-alamalilla ja multilinkeillä. Multilinkit ovat muutenkin erinomainen väline tilavuustarkasteluihin, luvun hajoittamiseen kolmen tekijän tuloksi, kuutiolukujen tarkasteluun, binomin potensseihin jne., vaikka niitä usein pidetään vain esi- tai alkuopetuksen rakentelumateriaaleina (Tevela 2003).

Punaiset langat

Algebran kynnystä voitaisiin helpottaa vielä antamalla viidennellä ja kuudennella luokalla oppilaille suunnitelmallisia kokemuksia, joiden varaan muuttujan ja funktion käsitteet voidaan myöhemmin rakentaa. Yksi keino on funktiokone (Fernström ym. 2002). Funktion muodostamisääntö ("koneen nimilappu") voidaan aluksi antaa laskutoimitusmerkintöjä käyttäen, mutta jo kuudennen luokan lopulla voidaan ottaa käyttöön muuttujamerkintä: kertaa kaksi ($\cdot 2$, $2x$), viisi vähemmän ($- 5$, $x - 5$), kerrotaan itsellään (x^2). Nimityksiä "muuttuja" ja "funktio" ei vielä käytetä, vaan "x":ää käytetään vain funktiokoneeseen syötettävän luvun merkkinä. Funktiokone toimii myös takaperin, jos annetaankin vastaus ja kysytään lukua, joka koneeseen on syötettävä. Useamman funktiokoneen yhdistäminen johtaa jo yhdistetyn funktion ajatukseen vaiheessa, jossa funktioikäsitteen nimeäminenkin on vielä kaukana.

Lapsen ajattelussa kynnyskäsitteitä, vaikeita nivelkohtia, ei oikeasti ole. Ne syntyvät siitä, että opetus

on pirstottu pieniin jaksoihin, jotka pyritään opettamaan erillisinä. Kurssikin (vuosiviikkotunti) on pieni yksikkö vaikeiden käsitteiden rakentamisessa ja oppimisen varmentamisessa. Kynnykset voidaan poistaa huolellisella etukäteissuunnittelulla, mutta se edellyttää opettajalta tai ainakin oppimateriaalintekijältä matematiikan punaisten lankojen t.s. pitkien etenemislinjojen hahmottamista ja ottamista huomioon.

Toiminnasta mielikuviin

Jos halutaan, että asiat todella opitaan, niin niitä on opetettava, eikä vain nimetä ja määritellä ja sen jälkeen syöskytä laskemaan laskuja, joista useimmat eivät ymmärrä mitään. Matematiikan käsitteiden oppimisessa on oma hierarkiansa (kuva 3) toiminnasta piirroksen kautta mielikuviin (abstraktioihin). Ensimmäisten vaiheiden liian nopeasta ohittamisesta ei voi olla seurauksena muuta kuin pinnallista oppimista tai kokonaan oppimatta jäämistä.

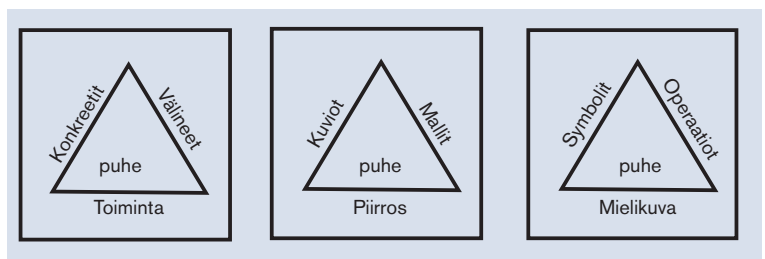
Vaikka edellä sanoin, että kynnystä voidaan madaltaa suhteellisen vähällä vaivalla, niin työtä ei voi jättää yksittäisen opettajan vastuulle, ei senkään takia, että yksittäiseltä opettajalta ei tavanomaisesti voi edellyttää kaikkea tarvittavaa: näkemystä matematiikan pitkistä linjoista, käsitteen vaiheittaisesta rakentumisesta silloin kun konkreettisen pohjustamisen tekee eri opettaja kuin itse käsit-

teen määrittelyn eikä edes oppilaan ajattelun ja oppimistavan tuentemista esimerkiksi luokkien 5–7 välillä. Ja ehkä suurimpana ongelmana on, että sekä luokan- että aineenopettajalla on nykyisin paljon oppiainesta tärkeämpiä kysymyksiä huolehdittavanaan koko ikäluokan opettamisessa.

Vastuun tulee siis olla opetus suunnitelman ja oppimateriaalin tekijällä. Hyvin lohdullista on, että esimerkiksi Helsingin Matikkamaa tarjoaa koulutusta pitkien linjojen huomioonottamiseen ja nivelkohtien opettamiseen (Matikkamaa 2003). Lukemisen arvoinen on myös murtolukujen konkertiointia koskeva artikkeli (Laitila 2003).

Viitteet:

- Fernström, T., Ikäheimo, H. Kairavuo, K., Korhonen, H., Koskeno, A., Lampinen, A. (2002): Uusia tuulia Unkarista. *Dimensio* 65, 1, 17–21.
- Kupari, P. ym. (2001) Miten matematiikka ja luonnontieteitä osataan peruskoulussa? Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.
- Laitila, H. (2003) Murtoluvut peruskoulun yläluokkien matematiikassa. Osoitteessa <http://solmu.math.helsinki.fi/2003/unkari/murtoluvut/>, viitattu 24.12.2003
- Matikkamaa (2003). Matikkamaa kouluttaa. Osoitteessa <http://www.edu.hel.fi/page.asp?Section=50&Item=2895>, viitattu 24.12.2003.
- Mattila, L. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 9. vuosiluokalla 2002. Oppitulosten arviointi 8/2002. Helsinki: Opetushallitus.
- Tarvainen, K. (2003) Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen. *Dimensio* 67, 5, 34–37.
- Tevela (2003). Matikkamaan välineet luokille 1–2. Osoitteessa <http://www.tevela.fi/PDF/Matikkalaatikot.pdf>, viitattu 2.1.2004.



Kuva 3. Matemaattisten käsitteiden oppimisen hierarkia.