Xylitolihedelmiä ja zitroonia

Seiskaluokkalaiset algebraa oppimassa

HANNU KORHONEN, lehtori; Orimattilan Erkko-lukio

Opetuksen perusteesinä tulisi olla, että kaikkien oppilaiden on mahdollista oppia se, mitä opetetaan. Lukioon tulijoiden laskutaidoista näkyy kuitenkin, että algebra on peruskoulussamme sellainen osa-alue, jossa tämä perusvaatimus ei toteudu huolimatta siitä, että opettajat ja oppilaat yrittävät parhaansa.

Eikä algebran oppiminen ole muuallakaan ongelmatonta. Oppiminen ei aina ole helppoa, mutta se on mahdollista. Kyse on vain oppimisen ymmärtämisestä ja sopivien keinojen valinnasta. Hyvistä esikuvista ja tietämyksestä ei ole puutetta.

Tiedetään hyvin, mitä on tehtävä, että oppilaat oppisivat opetettavat asiat. Unkarilaisen Tamás Vargan mukaan opetuksessa on edettävä ”toiminnan ja konkreettisten mallien ja symbolien kautta abstraktion ymmärtämiseen”. Uusi asia opetetaan ”useaan kertaan, jokaisella kerralla vähän vaativammalla tasolla – ja työskentely jatkuu pitkään kahdella eri tasolla.” ” Tärkeimmäksi nousee kysymys, miten oppiaines esitetään oppilaille.” (Ojala 2002)

Viimeksi mainittu on juuri se opettajalle työläs vaihe. Monenlaisia opetusmenetelmiä, työtapoja ja välineitä on. Ne on tunnettava ja niistä on valittava omille oppilaille sopivat ja keksittävä vielä lisääkin, jotta oppiminen onnistuu. ”Heikoimmille annetaan vaikka rullaluistimet, kunhan kaikki vain pääsevät maaliin” (Fernström ym. 2001).

Tänä talvena minulla on opetettavana seitsemännen luokan ryhmä, josta osaa olin opettanut jo kahtena edellisenä vuotena. Jälkeenpäin ajateltuna opettamista on helpottanut, että kaksi matemaattisesti lahjakkainta siirtyi oman luokkansa mukana toiselle opettajalle, vaikkakin se samalla vei monta ilonhetkeä. Toisaalta sain uusia oppilaita, joista on paljastunut kertotaulun osaamattomuutta, jakolaskun käsitteen oppimatta jäämistä kokonaan (sic!) ja jopa mukautettu matematiikan opiskelu alaluokilla, josta kukaan ei tullut kertoneeksi opettajalle mitään.

Olin opettanut seitsemännen luokan kurssin saman oppikirjan mukaan pari vuotta aikaisemmin. Siksi tiesin, että jos en tee mitään, niin en saa mitään pysyvää aikaan. Parhaat oppivat apinoimaan, mutta unohtavat sen hyvin pian, eivätkä heikommat opi mitään. Tunsin siis kriittiset kohdat, joille pitäisi jotain tehdä. Yhteisten kokeiden, ryhmän vaihdoksien ja muiden sellaisten syiden takia halusin kuitenkin käsitellä samoja asianimikkeitä, joita oppikirjassa on ja myös käyttää oppikirjan tehtäviä harjoittelumateriaalina.

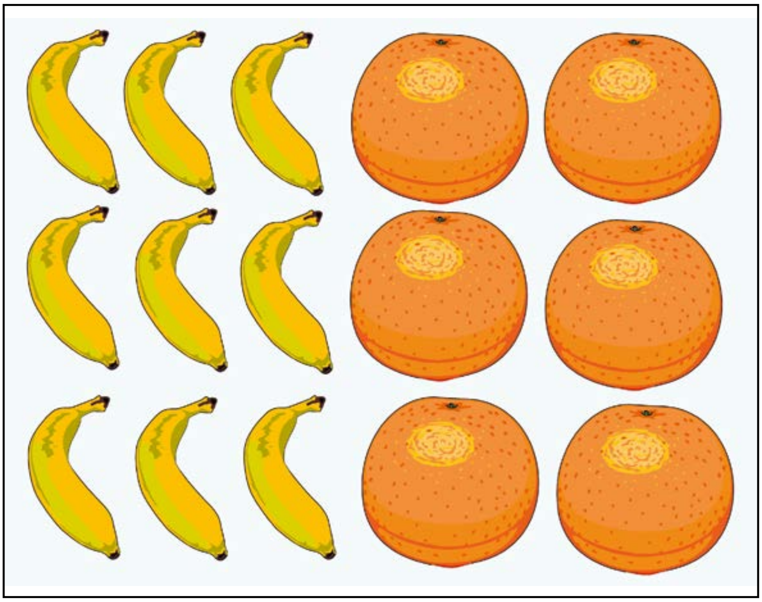
Kirjainyhteenlaskuja

Algebran kurssi alkaa kirjassa kirjainmuuttujien esittelyllä, nimityksillä ”termi”, ”kerroin” jne sekä lausekkeen arvon laskemisella. Omassa opetuksessani muuttujiin tultiin kahta tietä. Olin käyttänyt kirjainmuuttujaa x jo edellisenä vuonna funktiokoneen laskusäännön, ”ohjelman”, nimeämisessä siten, että esimerkiksi ”lisätään kaksi” merkittiin $x + 2$ ja ”kerrotaan kolmella ja vähennetään viisi” merkittiin $3 \cdot x – 5$. Seiskan syksyllä oppilaat ottivat muuttujamerkinnän käyttöön lisäämällä itse tekemiinsä päässälaskuihin yhtälöitä $10 + x = 3$ ja $\frac{1}{2} \cdot x = 7$ silloin, kun vielä oikeastaan harjoiteltiin kokonaislukujen ja rationaalilukujen laskutoimituksia.

Aloitus funktiokoneella

Tämän ansiosta oli helppo aloittaa algebran osuus funktiokoneesta. Ei muuttujasta eikä lausekkeesta puhuttu mitään, mutta funktiokoneen kuvan rinnalle oli helppo ottaa kuvaa abstraktimpi taulukko ja korvata sen sarakeotsikot ”sisään” ja ”ulos” esimerkiksi lausekkeilla x ja $x – 7$.

Seuraavaksi tarkoitukseni oli ryhtyä selostamaan kirjainlaskennan saloja. Aloitimme tutuista kirjaimista: 3m + 5m, 24h – 8h, 19 · 50 kg + 100 kg (luokan ja opettajan yhteisen massan likiarvo). Tästä siirryttiin pelkkien kirjainten laskemiseen m + m ja h + 2h + 3h säilyttäen kuitenkin konkreettinen mielikuva pituudesta ja ajasta. Samalla palautettiin mieleen pinta-alan yksiköitä cm^2 ja m^2, mistä oli mahdollista yrittää siirtyä kertolaskuihin m · m ja 2m · 3m. Muuttujat a ja b menivät yhteenlaskussa vielä appel-



Kuva 1: Appelsiinit ja banaanit lausekkeen $9a+6b$ mallina. Pienen apupiirroksen avulla kuvassa voidaan nähdä myös lausekkeet $3(3a+2b)$ ja $\frac{9a+6b}{3}$.

siineina ja banaaneina (kuva 1), mutta x:ien kanssa jouduin pulaan.

Olin nimittäin mennyt suurellisesti julistamaan, että nyt aloitetaan algebraa. Yritin selittää, mitä se oikein tarkoittaa ja miltä ajalta nimitys on peräisin. Lopuksi tokaisin hädissäni, että tämä nyt on yksi monista matematiikan osa-alueista, mihin joku oppilaista aivan spontaanisti loihe lausumaan: ”Miksi sinä et sitä heti sanonut”. Se riitti siis algebran selitykseksi.

Oppikirjan laskuissa käytettiin muiden kirjainten ohella muuttujaa x. Sen konkretisoimiseen en keksinyt muuta ratkaisua kuin tavanomaisen piirin laskemisen. Ruutupaperilla tämä käykin helposti, kun aluksi piirretään vain kuvioita, joiden sivut kulkevat ruutuviivoja pitkin ja sivujen pituudet ovat ruudun sivun x kokonaiskerrannaisia. - ”Kokonaiskerrannainen” osoittautui muuten sanaksi, jota ihmeteltiin pitkään ja hartaasti.

Johdantoharjoituksena oli ongelma ”piirrä kuvio, jonka piiri on $12x$, kun x on ruudun sivu”. Kuviot piirrettiin sekä merkittiin ja laskettiin kuvion piiri. Kotitehtävänä oli vastaavasti $24x$. Kertomerkin pois jättämisen mainitseminen oli mielestäni kaikkein luontevinta tässä yhteydessä, koska tässä x on yksikön asemassa, eikä lukuarvon ja metrinkään välissä käytetä pistettä.

Piirtämistä ja pinta-aloja

Luonnostaan tuli tietysti puheeksi, miten piirretään kuvio, jonka piiri on pariton, esimerkiksi $3x$ tai $11x$. Tasasivuisen kolmion idean palauttaminen mieleen tällaisessa kohdassa osoittautui täysin ylivoimaiseksi kaikille oppilaille, vaikka suurin osa olisi varmasti osannut nimetä kuvion, jos sitä olisi näytetty ja kysytty nimeä. Oliko siitä siis oikeastaan opittu mitään edellisten vuosien geometrian opetuksessa.

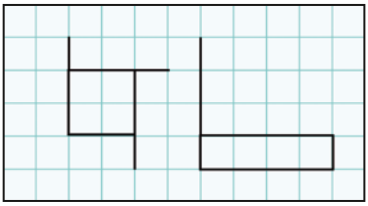
Tässä yhteydessä sain yhden tämän opetusjakson palkitsevimmista kokemuksistani. Yksi luokan neljästä motivoitumattomimmasta oppilaasta, tyttö, jolla oli tapana myöhästellä tunnin alusta, olla poissa kokonaisia päiviä kodin tietämättä jms, innostui harpilla piirtämisestä niin, että hän mielestäni keksi itsenäisesti tasakylkisen kolmion piirtämisen 11 x:n tapauksessa. Sen jälkeen hän on suhtautunut matematiikkaan aivan eri tavalla. Säännöllisen kuusikulmion piirtämisestä hän oli aivan innoissaan, mitä en olisi voinut kuvitellakaan ensimmäisen jakson innottomuuden perusteella.

- Oli tässä jaksossa negatiivistakin. Luokan luovin, vaikka ei suinkaan osaamiseltaan läheskään paras matemaatikko, poika, joka on kovasti viehtynyt erikoisiin ratkaisuihin ja ongelmatehtävien pohdiskeluun, ilmoitti mielipiteenään, että mitä ihmeen algebraa tämä nyt on, geometriaahan me opiskelemme.

Kun tämä tuli sanotuksi näin selvästi, niin päätin tunnustaa väriä. Geometria ei enää ollut pelkästään algebran käsitteiden oppimista tukevien mielikuvien rakentamisen apuväline, vaan rakensin harjoituksia myös geometriaa ajatellen. Tai ainakin muutin algebran oppimisen järjestystä geometristen kokonaisuuksien aikaansaamisen takia. Siksi olikin luontevaa siirtyä piiristä pinta-alaan. Kertasimme pikaisesti neliölaatoilla pinta-alan laskemisen idean: sivu kertaa sivu tai pituus kertaa leveys. Kertolaskulla $x \cdot x$, missä x on ruudun sivu, on siis geometrinen vastine, malli, ja ruudun pinta-ala on x^2.

Malleja ja mielikuvia

Mietittäväkseen oppilaat saivat ihmetehtävän ”piirrä kuvio, jonka pinta-ala on $24\,x^2$, missä x on ruudun sivu”. Tämän parissa sitten taas aikaa vierähtikin tuntikausia, kun merkittiin ja laskettiin myös piirejä. Eikä kuvioissa rajoitettu



Kuva 2: Lausekkeen $4x^2 + 3x$ malleja.

suorakulmioihin, vaan piirrettiin myös suunnikkaita ja kolmioita. - Geometrisen mallin avulla yritin myös luoda mielikuvaa siitä, miksi x:ää ja sen neliötä ei saa laskea yhteen. Se tuntuikin onnistuvan, vaikka keksimämme lausekkeen $4x^2 + 3x$ mallit (kuva 2) eivät ehkä täytä vakavasti ja säntillisesti matematiikkaan suhtautuvan puristin vaatimuksia.

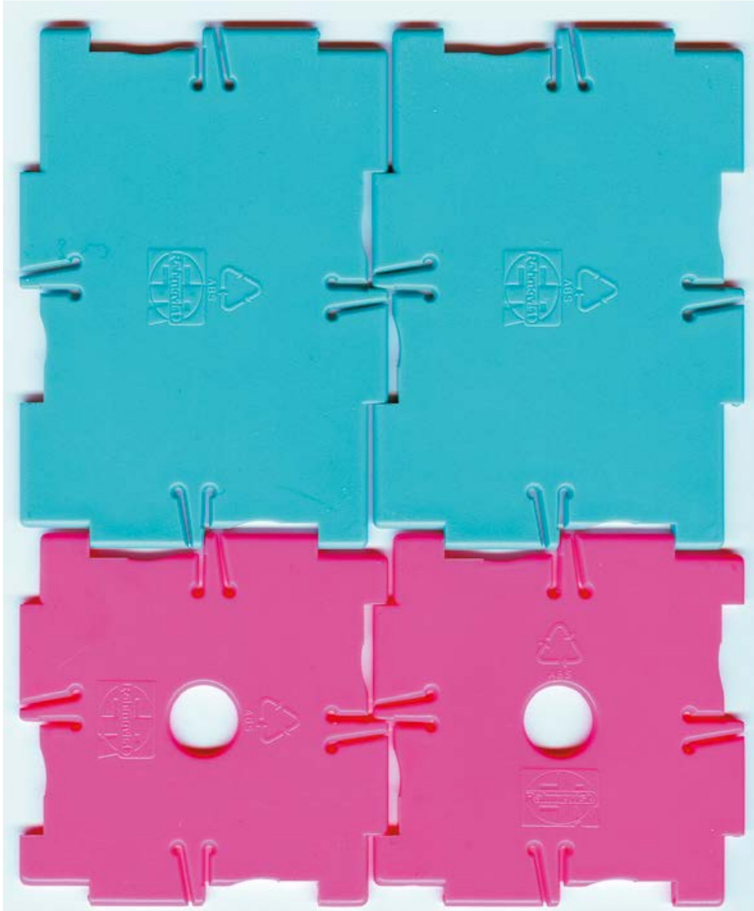
Tähän tapaan me sitten jatkoimme eteenkinpäin. Binomin kertominen luvulla onnistui neliö- ja kuutiolaatoilla (kuva 3), kun sovittiin että lyhyempi sivu on a ja pitempi on b. Yhteenlaskuihin $x^3 + 6x^3$ ja kertolaskuihin $6x^2 \cdot 3x$ saatiin apua tilavuudesta ja multilinkeistä.

Välillä laskettiin kirjan laskuja niistä asioista, joita oli yhdessä käsitelty. Samoja asioita käsiteltiin, mutta monesti jouduin sanomaan, että lasketaan vain tietyt tehtävät ja jätetään muut, joskus jopa osatehtävät väliin vielä tällä kerralla, koska etenemisemme oli paljon hitaampaa kuin oppikirjan suunnitelma olisi edellyttänyt.

Oli kirjasta kyllä monesti hyötyäkin. Jouduimme opiskelemaan kirjan käyttämiä nimityksiä ja sanontoja. Ja välillä kyllä myös laskemaan sellaisia laskuja, joita en olisi muuten tullut ottaneeksi esille.

Näistä hauskimpia oli monien kirjainten käyttö binomin kertomisessa ja jakamisessa. Jakolasku $\frac{9a + 6b}{3}$ tarkoittaa tietenkin kuvan 1 mukaisten appelsiinien ja banaanien pussittamista kolmeen samanlaiseen pussiin, mutta millaista mallia voisi ajatella oppikirjan laskulle $\frac{24x + 18z}{6}$.

Hädissäni rupesin tarjoamaan, että pussitetaan nyt xylitolihedelmiä ja... Ennen kuin ehdin keksiä mitään z:lla alkavaa hedelmää, niin luokasta kuului hilpeä ääni ”ja zitroonia”.



Kuva 3: Lausekkeen $2a(a+b)$ malli Geo-Creative-laatoilla toteutettuna.

Mikään näistä asioista ei oikeastaan ollut uutta oppikirjaan verrattuna. Käyttämässämme kirjassa malleja oli tehtävinä ripoteltuna pitkin matkaa, tosin vähän kaiken kaikkiaan, vain siellä täällä kuin mausteeksi. Toisessa oppikirjassa, jota vilkaisin, malleja käytettiin hyvin ja perusteellisesti johdatteluna muuttujan käsitteen opettamisessa ja myöhemmin toisen kerran binomien kertolaskussa, mutta tehtävinä näitä kahta jakson aloitusta lukuun ottamatta taas ei lainkaan. Opetussuunnitelman sisältöluettelon tasolla eroa ei olisi ollut ollenkaan. Ero on kuitenkin suuri ajankäytössä ja eniten siinä, miten kauan tehtäviä pyritään ratkaisemaan malliin tukeutuen ja kuinka paljon tehtävissä on geometriseen tai muuhun konkreettiseen tilanteeseen liittyvää ainesta. Konkreetti ja abstrakti elävät näin koko ajan rinnakkain oppilaan mielessä.

→

→

Opittiinko?

Tietysti meiltä jäi paljon oppimatta. Merkkien sievennyslaskuja $-(+5x)-(-6x)$ ei harjoiteltu ollenkaan. Polynomien nimitysten oppiminen jäi aika vähälle, samoin binomien yhteen- ja vähennyslasku.

Perusasioita oli kuitenkin opittu. Jakson jälkeen pidetyssä kokeessa ei kukaan sekoittanut $2x$:ää ja x^2:ta. Samoin $10x - x$ meni oikein luokan heikoimmaltakin. Kyllä sieltä puutteitakin paljastui: $3x \cdot 4x$ oli useammalla $12x$, lausekkeen $3(5x + 15)$ laskeminen osittelulain mukaan osattiin huonosti eikä $(6x - 7)+(-5x - 3)$ onnistunut kuin kolmasosalta. Näistä ainakin osittelulakia eli siis pussittamista, erityisesti useamman samanlaisen pussin ja kahden erilaisen pussin yhdistämisen merkitsemistä lausekkeena harjoituttaisin paljonkin enemmän.

Oppilaat ymmärsivät, osasivat ja keksivät

Parasta oli kuitenkin se, että koko jakson aikana kukaan ei kysynyt, että mitä ne x:t ovat tai mihin niitä tai koko algebraa tarvitaan. Oppiminen rakentui käsitteiden konkreettisten merkitysten varaan. Oppilaat luullakseni olivat ymmärtävinään, mitä olivat tekemässä, osasivat tehdä, mitä pyydettiin ja pystyivät itsekin keksimään lisää ideoita tai ainakin ratkaisuja annettuihin tehtäviin. Osaaminen on vielä jakson jälkeenkin kovin konkreetilla tasolla.

Useammassa kohdassa opetusjakson aikana tuli näkyviin, että vaikka asiat on opittu konkreettisesti mallin avulla, niin yleistys ja abstrahointi ovat vielä oma kynnyksensä. Joutuipa oppilas kokeessakin kysymään lausekkeesta x^2, onko se neliö (malli) vai potenssi (abstraktio). Yleistämiseen mallin mukaisesta konkretiasta abstraktioon minulla ei ole kunnon ratkaisua. Ellei todellakin ole niin, että seiskaluokkalaiset eivät vielä ole siirtyneetkään ajattelussaan abstraktiin vaiheeseen eikä sitä siten heiltä vielä olisi kohtuullista vaatiakaan.

Lisää ideoita

Jakson toteutus on vaikuttanut minun mielessäni koko seitsemännen luokan matematiikan tavoitetason määrittelyyn. Jos minulla olisi valta – ja aioin sitä yrittää kunnallisen opetussuunnitelman tavoitteidenasettelun hienosäätövaiheessa – niin seitsemännen luokan algebrassa ei pyrittäisikään yli sen, mitä voidaan nähdä malleista.

Tämä tarkoittaa lähinnä sitä, että missään laskuissa tai ainakaan niissä, jotka vaaditaan osattaviksi, ei esiinny, ei edes tuloksessa, kolmatta astetta korkeampaa muuttujan potenssia. Ei ehkä kovin suuri rajaus, mutta opettamisen konkreettisuuden kannalta aivan ratkaiseva.

Opettamisen tavan kehittely sen mukaan, oppivatko oppilaat ja miten he oppivat, on työlästä ja vaatii koko ajan uuden keksimistä. Jälkeenpäin olen huomannut, että etukäteisvalmistelulla, jos siihen olisin kyennyt, olisin voinut säästyä joiltakin ongelmilta ja saada hyviä ideoita muualtakin kuin julkaistusta unkarilaisesta materiaalista (Risku ym. 2003, Szalontai 2002). Opettamisen yksityiskohtien toteutus ei kuitenkaan ollut millään lailla selkeänä mielessäni etukäteen. Oli vain yleiset suuntaviivat. En siis olisi ehkä edes osannut ottaa ideoita vastaan etukäteen vaan vasta vähitellen opetuksen edetessä.

Lisää uskallusta ja hyviä ideoita sekä opettamiseen että kokeen tekemiseen olisin kyllä saanut ranskalaisten kokemuksista (Algèbre et fonctions 2004). Niihin tutustuin ja osasin antaa niille arvoa vasta jälkeenpäin. Julkaisussa käsitellään samoja vaikeuksia, jotka ovat tulleet esille omassa opetuksessani, suomalaisessa keskustelussa yleisestikin ja kansallisissa arvioinneissa. Algebran oppimisen vaikeuksien analyysin lisäksi julkaisuun sisältyy systemaattinen joukko vuosi vuodelta eteneviä konkreettisia esimerkkejä siitä, mitä algebrasta osataan ja mitä voisi vaatia opittavaksi.

Lähteet:

Algèbre et fonctions 2004. Algèbre et fonctions. Ministre de l'education nationale, de la recherce et de la technologie, Direction de l'enseignement scolaire, Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques. Osoitteessa http://www.eduscol.education.fr/D0124/algebre_et_fonctions.pdf, viitattu 22.2.2004.

Fernström, T. ym 2001. Uusia tuulia Unkarista. Dimensio 1/2001, 17–21.

Ojala, P. 2002. Olisipa Tamas Varga tutustunut N. C. Kephartin ajatuksiin! Kielikukko 1/2002, 17–21.

Risku, A.-M., Hirsilä, M.-L. ja Tikkanen, P. 2003. Unkarista oppia matematiikan alkuopetukseen. Osoitteessa http://solmu.mat.helsinki.fi/alkuopetus/amr.htm, viitattu 5.1.2003.

Szalontai, T. 2002. Kurssi unkarilaisesta matematiikan opetustyylistä. Osoitteessa http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/kurssi.html, viitattu 11.12.2003.