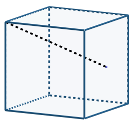
MAOLIN ALKUKILPAILUN TEHTÄVÄT

Perussarja

(1) Eräissä vaaleissa äänestysprosentti oli 65. Puolue A sai 60 % annetuista äänista ja puolue B 40 % annetuista äänistä. Niistä äänioikeutetuista, jotka eivät äänestäneet, 80 % kannatti puoluetta B ja loput puoluetta A. Jos kaikki äänioikeutetut olisivat äänestäneet, niin

(a) A olisi saanut eniten ääniä.
(b) B olisi saanut eniten ääniä.
(c) Tulos olisi ollut tasapeli.
(d) Tulosta ei voi määrittää annetuilla tiedoilla ilman äänioikeutettujen tarkkaa määrää.

(2) Kuution, jonka sivun pituus on 2, yhden tahkon kulmasta piirretään jana vastakkaisen tahkon keskipisteeseen. Mikä on tämän janan pituus?

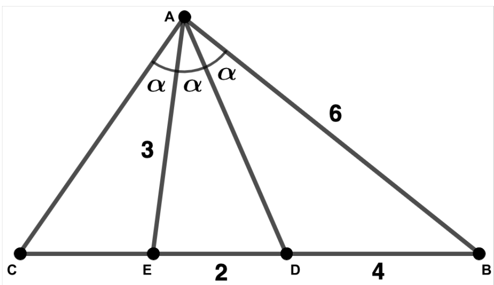


(a) $\sqrt{5}$
(b) $\pi - 1$
(c) $\sqrt{6}$
(d) $\sqrt{7}$

(3) Suorakulmaisen kolmion kaikkien sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Mitkä seuraavista väitteistä ovat mahdollisia?

(a) Kaikkien sivujen pituudet ovat parittomia lukuja.
(b) Kahden sivun pituus on pariton luku ja yhden parillinen.
(c) Kahden sivun pituus on parillinen luku ja yhden pariton.
(d) Kaikkien sivujen pituudet ovat parillisia lukuja.

(4) Määritä sivun CE pituus. Huomaa, että kuvan mittasuhteet eivät välttämättä ole oikein.



(a) 2
(b) $2\frac{1}{6}$
(c) $2\frac{3}{5}$
(d) 3

(5) Läpinäkymättömässä purkissa on 8 vihreää ja 5 punaista palloja. Pallot ovat väriä vaille identtisiä. Purkista nostetaan kaksi palloa ilman takaisinpanoa.
(a) On todennäköisempää saada ensin vihreä ja sitten punainen pallo kuin ensin punainen ja sitten vihreä pallo.
(b) On todennäköisempää saada kaksi vihreää palloa kuin eriväriset pallot.
(c) Todennäköisyys kahdelle punaiselle pallolle on alle 25 %.
(d) Todennäköisyys kahdelle vihreälle pallolle on alle 35 %.

(6) Kuinka monta sellaista positiivista kokonaislukua d on olemassa, että 2024 jaettuna luvulla d on kokonaisluku?
(a) 8
(b) 12
(c) 16
(d) 20

(7) Puhelinnumerossa on 10 numeroa. Sen alku on 0405. Mikä on todennäköisyys, että loppujen 6 numeron joukossa on 123 peräkkäin?

(8) Määritä pienimmän sellaisen (reaaliluku) joukon koko, jolle pätee, että jokainen alkio voidaan esittää kahden muun joukon alkion summana ja joukon alkiot ovat erisuuria.

Välisarja

(1) Suorakulmaisen kolmion kaikkien sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Mitkä seuraavista väitteistä ovat mahdollisia?
(a) Kaikkien sivujen pituudet ovat parittomia lukuja.
(b) Kahden sivun pituus on pariton luku ja yhden parillinen.
(c) Kahden sivun pituus on parillinen luku ja yhden pariton.
(d) Kaikkien sivujen pituudet ovat parillisia lukuja.

(2) Kuinka monta sellaista positiivista kokonaislukua d on olemassa, että 2024 jaettuna luvulla d on kokonaisluku?
(a) 8
(b) 12
(c) 16
(d) 20

(3) Tiedetään, että $a < b < c < d$ (nollasta poikkeavia reaalilukuja) ja $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$. Mitkä seuraavista ovat välttämättä positiivisia?
(a) $-a - 2b - 4c + 3d$
(b) $2a - b + 3c + 2d$
(c) $-2a - 3a - c + 2d$
(d) $a + 2b + 3c + 4d$

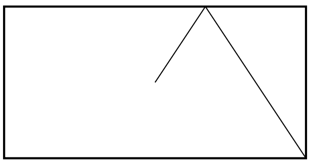
(4) Puhelinnumerossa on 10 numeroa. Sen alku on 0405. Mikä on todennäköisyys, että loppujen 6 numeron joukossa on 123 peräkkäin?

(5) Anna ja Pekka pelaavat peliä, jossa he ottavat joukosta pinoja vuorotellen tikkuja. Anna aloittaa. Kumpikin pelaaja valitsee vuorollaan pinon ja ottaa valitsemastaan pinosta tikkuja; hän ottaa ainakin yhden tikun, mutta voi myös ottaa pinon kaikki tikut. Se pelaaja, joka ottaa viimeisen tikun, voittaa. Skenaariossa A on kaksi pinoa, joista toisessa on 1 tikku ja toisessa 2 tikkua. Skenaariossa B on kolme pinoa, joista yhdessä on 1 tikku, toisessa 2 tikkua ja kolmannessa 3 tikkua. Kummalla pelaajalla on näissä skenaarioissa strategia, jolla hän voi aina voittaa?

(6) Etsi yhtälön $x^3 - y^3 = 2024$ kaikki ratkaisut positiivisten kokonaislukujen joukossa.

Avoin sarja

(1) Tero pelaa birjardia laudalla, jonka pelialue on 192 cm $\times$ 120 cm. Hän lyö palloa, joka on keskellä pöytää. Se kimpoaa reunasta samassa kulmassa, missä se osuu siihen, ja menee kulmataskuun kuvan osoittamalla tavalla. Kuinka pitkän matkan pallo kulkee?



(a) 200 cm
(b) 204 cm
(c) 208 cm
(d) 212 cm

(2) Tiedetään, että $a < b < c < d$ (nollasta poikkeavia reaalilukuja) ja $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$. Mitkä seuraavista ovat välttämättä positiivisia?

(a) $-a - 2b - 4c + 3d$
(b) $2a - b + 3c + 2d$
(c) $-2a - 3a - c + 2d$
(d) $a + 2b + 3c + 4d$

(3) Puhelinnumerossa on 10 numeroa. Sen alku on 0405. Mikä on todennäköisyys, että loppujen 6 numeron joukossa on 123 peräkkäin?

(4) Anna ja Pekka pelaavat peliä, jossa he ottavat joukosta pinoja vuorotellen tikkuja. Anna aloittaa. Kumpikin pelaaja valitsee vuorollaan pinon ja ottaa valitsemastaan pinosta tikkuja; hän ottaa ainakin yhden tikun, mutta voi myös ottaa pinon kaikki tikut. Se pelaaja, joka ottaa viimeisen tikun, voittaa. Skenaariossa A on kaksi pinoa, joista toisessa on 1 tikku ja toisessa 2 tikkua. Skenaariossa B on kolme pinoa, joista yhdessä on 1 tikku, toisessa 2 tikkua ja kolmannessa 3 tikkua. Kummalla pelaajalla on näissä skenaarioissa strategia, jolla hän voi aina voittaa?

(5) Etsi yhtälön $x^3 - y^3 = 2024$ kaikki ratkaisut positiivisten kokonaislukujen joukossa.

(6) Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. H on kolmion korkeusjanojen leikkauspiste. Olkoon H' H:n peilaus janan B suhteen. Osoita, että H' on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä.

RATKAISUT

Perussarja

(1) Merkitään äänestäneiden henkilöiden lukumäärää termillä x. Tällöin puolue A sai $0.6 * x$ ääntä ja puolue B sai $0.4 * x$ ääntä. Jos kaikki olisivat äänestäneet, puolue A olisi saanut $0.6 * x + (1 - 0.65) * 0.2 * x = 0.6 * x + 0.07x = 0.67x$ ääntä, ja puolue B olisi saanut $0.4 * x + (1 - 0.65) * 0.8 * x = 0.4 * x + 0.35 * 0.8 * x = 0.4 * x + 0.28 * x = 0.68 * x > 0.67 * x$ ääntä, joten puolue B olisi saanut eniten ääniä.

(2) Kun tarkastelemme janan projektiota sellaisen tahkon sivua pitkin, jonka kulmasta jana lähtee, kulkee jana tällä tahkolla $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ pituisen matkan. Jos pidämme tätä tahkoa kuution pohjana, muodostuu vastakkaiselle tahkolle korkeusjana, jonka pituus on 1. Kaksi annettua janaa muodostavat suorakulmaisen kolmion, joten kysytyn janan pituus on $\sqrt{\sqrt{5}^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

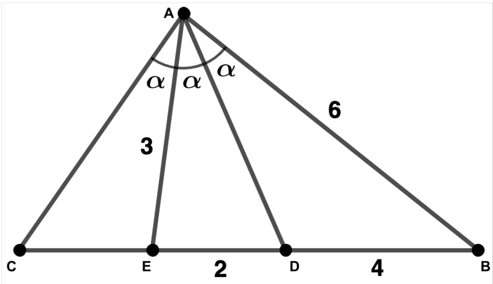
(3) Ensimmäinen väite ei ole mahdollinen, sillä sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen ja kahden parittoman luvun summa on parillinen.

Toinen väite on mahdollinen. Esimerkiksi käy kolmio, jonka sivut ovat 3, 4 ja 5.

Kolmas väite ei ole mahdollinen, sillä sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen ja kahden parillisen luvun summa ja erotus ovat myös parillisia.

Viimeinen väite on mahdollinen. Esimerkiksi käy kolmio, jonka sivut ovat 6, 8 ja 10.

(4) AEB on tasakylkinen $\rightarrow \angle AEB = 2\alpha \rightarrow \angle AEC = 180° - 2\alpha \rightarrow \angle ACE = \alpha \rightarrow$ AEC on tasakylkinen $\rightarrow$ oikea vastaus on d) 3



(5) Ensimmäinen väite on väärin. Kummankin tapahtuman todennäköisyys on yhtä suuri $\frac{8 \cdot 5}{13 \cdot 12}$. Toinenkin väite on väärin, sillä kahden vihreän pallon todennäköisyys on $\frac{8 \cdot 7}{13 \cdot 12}$, kun taas eriväristen pallojen todennäköisyys on $\frac{2 \cdot 8 \cdot 5}{13 \cdot 12}$. Kolmas väite on tosi, sillä kahden punaisen pallon todennäköisyys on $\frac{5 \cdot 4}{13 \cdot 12} = \frac{5}{39}$. Neljäs väite ei ole tosi, sillä kahden vihreän pallon todennäköisyys on $\frac{8 \cdot 7}{13 \cdot 12} \approx 0{,}359$.

(6) $2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 13^1$. Voimme valita neljällä tavalla luvun 2 potenssin, kahdella tavalla luvun 11 potenssin ($11^0 = 1$ tai $11^1 = 11$) ja kahdella tavalla luvun 13 potenssin. Näistä tulee yhteensä $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ eri vaihtoehtoa, jotka muodostavat kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka jakavat luvun 2024 tasan.

(7) Numeroita on yhteensä 10^6 kappaletta. Ehdon toteuttaa numero, jonka loppuosa on 123xyz tai x123yz tai xy123z tai xyz123. Tällaisia numeroita on $4 \cdot 10^3$ kappaletta. Nyt on kuitenkin laskettu kahdesti numero, jonka loppuosa on 123123. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{3999}{10^6}.$$

(8) Ratkaisu on esim. -3, -2, -1, 1, 2, 3 eli 6. Osoitetaan, että pienemmät joukot eivät toimi: Olkoon $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$, jos $a_1 \geq 0$, mikään summa $a_i + aj$ ei voi olla a_1. Täten $a_1 < 0$. Vastaavasti $a_n > 0$, jos $a_i + aj = a_1$, niin $a_i, a_j < 0$. Täten joukossa on vähintään kolme negatiivista lukua. Symmetrialla saadaan, että positiivisia lukuja on myös vähintään kolme. Täten pienin joukon koko on oltava vähintään 6 eli 6.

Välisarja

(1) Ensimmäinen väite ei ole mahdollinen, sillä sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen ja kahden parittoman luvun summa on parillinen.

Toinen väite on mahdollinen. Esimerkiksi käy kolmio, jonka sivut ovat 3, 4 ja 5.

Kolmas väite ei ole mahdollinen, sillä sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen ja kahden parillisen luvun summa ja erotus ovat myös parillisia.

Viimeinen väite on mahdollinen. Esimerkiksi käy kolmio, jonka sivut ovat 6, 8 ja 10.

(2) $2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 13^1$. Voimme valita neljällä tavalla luvun 2 potenssin, kahdella tavalla luvun 11 potenssin ($11^0 = 1$ tai $11^1 = 11$) ja kahdella tavalla luvun 13 potenssin. Näistä tulee yhteensä $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ eri vaihtoehtoa, jotka muodostavat kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka jakavat luvun 2024 tasan.

(3) Jos ensimmäisen epäyhtälöryhmän ehto $a < b$ jaetaan puolittain ab:lla, saadaan $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, mikäli $ab > 0$. Jos $ab < 0$, niin silloin saamme ristiriidan $a < b$ ja $a > b$. Vastaavasti on oltava $ad < 0$, koska muutoin $d < a$ ja $a < d$. Samoin on oltava $cd > 0$, koska muutoin $c < d$ ja $d > c$. Ehdoista $ad < 0$ ja $a < d$ voimme päätellä, että a on negatiivinen ja d on positiivinen. Ehdosta $cd > 0$ ja $d > 0$ voimme päätellä, että $c > 0$. Koska $ab > 0$ ja $a < 0$, on oltava $b < 0$.

(a) Esim. $a = -2$, $b = -1$, $c = 100$, $d = 101$ toteuttaa ehdot, mutta $-(-2) - 2 * (-1) - 4 * 100 + 3 * 101 = -93 < 0$.

(b) Esim. $a = -100$, $b = -1$, $c = 1$ ja $d = 2$ toteuttaa ehdot, mutta $2 * (-100) - (-1) + 3 * 1 + 2 * 2 = -192 < 0$.

(c) Koska $c < d$, niin $d - c > 0$. Myös $d > 0$ ja koska $a < 0$, niin $-5 * a > 0$. Yhdistämällä nämä saamme $(d - c) + d - 5 * a = -2a - 3a - c + 2 * d > 0$.

(d) Esim. $a = -100$, $b = -1$, $c = 1$ ja $d = 2$ toteuttaa ehdot, mutta $-100 + 2 * (-1) + 3 * 1 + 4 * 2 = -91 < 0$.

(4) Numeroita on yhteensä 10^6 kappaletta. Ehdon toteuttaa numero, jonka loppuosa on 123xyz tai x123yz tai xy123z tai xyz123. Tällaisia numeroita on $4 \cdot 10^3$ kappaletta. Nyt on kuitenkin laskettu kahdesti numero, jonka loppuosa on 123123. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{3999}{10^6}.$$

(5) Anna voittaa skenaarion A ja Pekka voittaa skenaarion B.

Skenaario A: Jos Anna ottaa yhden tikun kahden tikun pinosta, Pekka joutuu valitsemaan yhden tikun jommastakummasta pinosta ja Anna voittaa.

Skenaario B: Jos Anna ottaa yhden tikun yhden tikun pinosta, Pekka ottaa yhden tikun kolmen tikun pinosta, jolloin kummassakin pinossa on kaksi tikkua. Nyt Pekka ottaa joka kerta toisesta pinosta yhtä monta tikkua kuin Anna toisesta, jolloin Pekka voittaa. Jos taas Anna ottaa yhden tikun kolmen tikun pinosta, Pekka ottaa yhden tikun yhden tikun pinosta ja voittaa matkimalla taas Annan seuraavia siirtoja. Jos Anna ottaa yhden tikun kahden tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla kaikki tikut kolmen tikun pinosta. Jos Anna ottaa kaksi tikkua kahden tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla kaksi tikkua kolmen tikun pinosta. Jos Anna ottaa kaksi tikkua kolmen tikun pinosta, Pekka voittaa tyhjentämällä minkä tahansa pinon. Jos Anna ottaa kolme tikkua kolmen tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla yhden tikun kahden tikun pinosta. Tässä käytiin läpi kaikki vaihtoehdot.

(6) Saadaan $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Ensinnäkin kummankin luvun on oltava parillinen tai pariton. Ei ole mahdollista, että toinen olisi pariton ja toinen parillinen. Jos kumpikin on pariton, niin x^2+xy+y^2 on pariton ja $x-y$ parillinen.

Saadaan vaihtoehdot

$$x - y = 8 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 11 \cdot 23$$

tai

$$x - y = 8 \cdot 11 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 23$$

tai

$$x - y = 8 \cdot 23 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 11.$$

Sekä toisessa että kolmannessa vaihtoehdossa olisi

$$x > x - y > x^2 + xy + y^2,$$

mikä ei ole mahdollista. Tarkastellaan siis ensimmäistä vaihtoehtoa. Saadaan $x = y + 8$, joten

$$(y + 8)^2 + (y + 8)y + y^2 = 11 \cdot 23.$$

Nyt

$$3y^2 + 24y - (11 \cdot 23 - 64) = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisut eivät ole kokonaislukuja. Tämäkään vaihtoehto ei siis ole mahdollinen.

Siirrytään tapaukseen, jossa sekä x että y ovat parillisia. Kirjoitetaan $x = 2x_1$ ja $y = 2y_1$. Nyt

$$(2x_1)^2 - (2y_1)^2 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23,$$

eli

$$x_1^2 - y_1^2 = 11 \cdot 23,$$

eli

$$(x_1 - y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) = 11 \cdot 23.$$

Koska $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 > x_1 - y_1$, on oltava

$$x_1 - y_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 11 \cdot 23$$

tai

$$x_1 - y_1 = 11 \quad \text{ja} \quad x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 23.$$

Yhtälöparit voidaan ratkaista kuten yllä. Näillä ei ole kokonaislukuratkaisuja. Alkuperäisellä yhtälöllä ei siis ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja.

Avoin sarja

(1) 204 cm. Voimme jatkaa pallon rataa ensimmäisestä kimpoamiskulmasta eteenpäin, kunnes se tulee oikean reunan tasalle. Tähän muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka yhden sivun pituus on $192/2 = 96 = 8 \cdot 12$ cm ja toisen sivun pituus on $3 * 120/2 = 180 = 15 \cdot 12$ cm. Hypotenuusan pituus on $12 \cdot \sqrt{8^2 + 15^2} = 12 \cdot \sqrt{289} = 12 \cdot 17 = 204$ cm.

(2) Jos ensimmäisen epäyhtälöryhmän ehto $a < b$ jaetaan puolittain ab:lla, saadaan $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, mikäli $ab > 0$. Jos $ab < 0$, niin silloin saamme ristiriidan $a < b$ ja $a > b$. Vastaavasti on oltava $ad < 0$, koska muutoin $d < a$ ja $a < d$. Samoin on oltava $cd > 0$, koska muutoin $c < d$ ja $d > c$. Ehdoista $ad < 0$ ja $a < d$ voimme päätellä, että a on negatiivinen ja d on positiivinen. Ehdosta $cd > 0$ ja $d > 0$ voimme päätellä, että $c > 0$. Koska $ab > 0$ ja $a < 0$, on oltava $b < 0$.

(a) Esim. $a = -2$, $b = -1$, $c = 100$, $d = 101$ toteuttaa ehdot, mutta $-(-2) - 2 * (-1) - 4 * 100 + 3 * 101 = -93 < 0$.

(b) Esim. $a = -100$, $b = -1$, $c = 1$ ja $d = 2$ toteuttaa ehdot, mutta $2 * (-100) - (-1) + 3 * 1 + 2 * 2 = -192 < 0$.

(c) Koska $c < d$, niin $d - c > 0$. Myös $d > 0$ ja koska $a < 0$, niin $-5 * a > 0$. Yhdistämällä nämä saamme $(d - c) + d - 5 * a = -2a - 3a - c + 2 * d > 0$.

(d) Esim. $a = -100$, $b = -1$, $c = 1$ ja $d = 2$ toteuttaa ehdot, mutta $-100 + 2 * (-1) + 3 * 1 + 4 * 2 = -91 < 0$.

(3) Numeroita on yhteensä 10^6 kappaletta. Ehdon toteuttaa numero, jonka loppuosa on 123xyz tai x123yz tai xy123z tai xyz123. Tällaisia numeroita on $4 \cdot 10^3$ kappaletta. Nyt on kuitenkin laskettu kahdesti numero, jonka loppuosa on 123123. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{3999}{10^6}.$$

(4) Anna voittaa skenaarion A ja Pekka voittaa skenaarion B.

Skenaario A: Jos Anna ottaa yhden tikun kahden tikun pinosta, Pekka joutuu valitsemaan yhden tikun jommastakummasta pinosta ja Anna voittaa.

Skenaario B: Jos Anna ottaa yhden tikun yhden tikun pinosta, Pekka ottaa yhden tikun kolmen tikun pinosta, jolloin kummassakin pinossa on kaksi tikkua. Nyt Pekka ottaa joka kerta toisesta pinosta yhtä monta tikkua kuin Anna toisesta, jolloin Pekka voittaa. Jos taas Anna ottaa yhden tikun kolmen tikun pinosta, Pekka ottaa yhden tikun yhden tikun pinosta ja voittaa matkimalla taas Annan seuraavia siirtoja. Jos Anna ottaa yhden tikun kahden tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla kaikki tikut kolmen tikun pinosta. Jos Anna ottaa kaksi tikkua kahden tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla kaksi tikkua kolmen tikun pinosta. Jos Anna ottaa kaksi tikkua kolmen tikun pinosta, Pekka voittaa tyhjentämällä minkä tahansa pinon. Jos Anna ottaa kolme tikkua kolmen tikun pinosta, Pekka voittaa ottamalla yhden tikun kahden tikun pinosta. Tässä käytiin läpi kaikki vaihtoehdot.

(5) Saadaan $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Ensinnäkin kummankin luvun on oltava parillinen tai pariton. Ei ole mahdollista, että toinen olisi pariton ja toinen parillinen. Jos kumpikin on pariton, niin x^2+xy+y^2 on pariton ja $x-y$ parillinen. Saadaan vaihtoehdot

$$x - y = 8 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 11 \cdot 23$$

tai

$$x - y = 8 \cdot 11 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 23$$

tai

$$x - y = 8 \cdot 23 \quad \text{ja} \quad x^2 + xy + y^2 = 11.$$

Sekä toisessa että kolmannessa vaihtoehdossa olisi

$$x > x - y > x^2 + xy + y^2,$$

mikä ei ole mahdollista. Tarkastellaan siis ensimmäistä vaihtoehtoa. Saadaan $x = y + 8$, joten

$$(y + 8)^2 + (y + 8)y + y^2 = 11 \cdot 23.$$

Nyt

$$3y^2 + 24y - (11 \cdot 23 - 64) = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisut eivät ole kokonaislukuja. Tämäkään vaihtoehto ei siis ole mahdollinen.

Siirrytään tapaukseen, jossa sekä x että y ovat parillisia. Kirjoitetaan $x = 2x_1$ ja $y = 2y_1$. Nyt

$$(2x_1)^2 - (2y_1)^2 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23,$$

eli

$$x_1^2 - y_1^2 = 11 \cdot 23,$$

eli

$$(x_1 - y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) = 11 \cdot 23.$$

Koska $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 > x_1 - y_1$, on oltava

$$x_1 - y_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 11 \cdot 23$$

tai

$$x_1 - y_1 = 11 \quad \text{ja} \quad x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 23.$$

Yhtälöparit voidaan ratkaista kuten yllä. Näillä ei ole kokonaislukuratkaisuja. Alkuperäisellä yhtälöllä ei siis ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja.

(6) Kolmiot BHC ja BH'C ovat yhtenevät peilauksen vuoksi. $\angle BH'C = \angle BHC = \angle DHE = 180 - \angle BAC \rightarrow$ ABH'C on jännenelikulmio.