



Neljän tieteen kisat  
Peruskoulun matematiikkakilpailu  
Loppukilpailutehtävät ja pisteytys  
MAOL ry

Järjestämisajankohta: pe 19.1.2024  
Palkintojenjako: la 20.1.2024  
Oppilaan ohjeet

Neljän tieteen kisat	3
Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu	4
Osa A	4
Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu	8
Osa B	8
Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu	12
Osa C	12
Finalen för grundskolans matematiktävling	15
Del A	15
Finalen för grundskolans matematiktävling	19
Del B	19
Finalen för grundskolans matematiktävling	23
Del C	23
Comprehensive school mathematics competition	26
Final round part A	26
Comprehensive school mathematics competition	30
Final round part B	30
Comprehensive school mathematics competition	34
Final round part C	34
Matemaatikavõistluse lõpp-voor	37
Osa A	37
Matemaatikavõistluse lõpp-voor	41
Osa B	41
Matemaatikavõistluse lõpp-voor	45
Osa C	45

# Neljän tieteen kisat

Kilpailussa saa käyttää vain kynää, pyyhekumia ja viivoitinta. Laskinta ei saa käyttää osassa A. Kännnykkää ei saa käyttää. **Kaikki tehtävät ratkaistaan suoraan tehtäväpaperiin.** Kilpailun karsivan luonteen vuoksi oppilaat eivät välttämättä ehdi ratkaista kaikkia kilpailutehtäviä annetussa ajassa. Tehtäviä on runsaasti, jotta oppilailla olisi valinnanvaraa. Kilpailutehtävät jakautuvat kolmeen kategoriaan:

-  Niihin tehtäviin, joiden tehtävänumeron yhteydessä on tämä merkintä, riittää pelkkä vastaus mahdollisine yksiköineen.
-  Niihin tehtäviin, joiden tehtävänumeron yhteydessä on tämä merkintä, tulee merkitä vastauksen ja mahdollisen yksikön lisäksi myös välivaiheita.
-  Niihin tehtäviin, joiden tehtävänumeron yhteydessä on tämä merkintä, tulee kirjoittaa täysi perusteltu vastaus välivaiheeseen, yksiköineen sekä selkeästi merkityine vastauksineen.

Konkurrenter får använda endast en penna, ett suddgummi och en linjal. Räknare får inte användas i del A. Smarttelefoner får inte användas. **Alla uppgifter lösas på uppgiftspappret.** Tävlingen är uteslutande, och därför har konkurrenter nödvändigtvis inte tillräcklig tid att svara alla uppgifterna i den tid som givs. Tävlingen består av många olika uppgifter så att konkurrenterna skulle kunna bestämma vilka de ska lösa. Uppgifterna delas i tre kategorier:

-  För uppgifterna med denna anteckning i samband med uppgiftnumret räcker att svaret med eventuella enheter skrivs.
-  För uppgifterna med denna anteckning i samband med uppgiftsnumret ska svaret, eventuell enhet, samt mellansteg markeras.
-  För uppgifterna med denna anteckning i samband med uppgiftsnumret måste ett fullständigt och motiverat svar med mellansteg, enheter samt tydligt markerade svar skivas.

Students may use a pencil, an eraser, and a ruler when solving the competition problems. Calculators are allowed after part A. Mobile devices are not allowed. **The solutions are to be written on the problems sheet.** Due to the competitive nature of the problems, there might not be enough time for students to solve all the problems in the time allotted. The broad selection of problems gives the students leeway to choose which tasks to solve. The tasks are divided into three categories:

-  For those tasks with this symbol next to the task number, an answer only, with a possible unit, is sufficient.
-  For those tasks with this symbol next to the task number, intermediate steps should also be given in addition to the answer and its possible unit.
-  For those tasks with this symbol next to the task number, a complete, justified answer with full intermediate steps, units, and clearly marked answers, is expected.

# Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu

## Osa A



**Etunimi:** \_\_\_\_\_

**Sukunimi:** \_\_\_\_\_



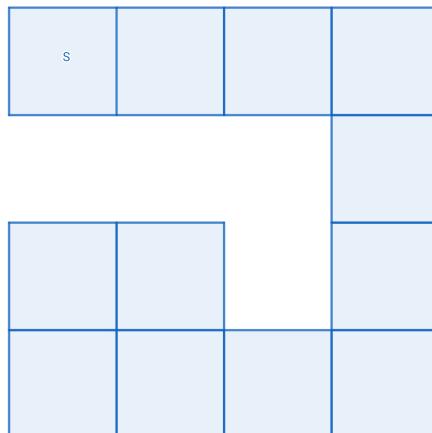
**A1**

Olet rakentanut robottipölynimurin, ja tavoitteenasi on ohjelmoida se puhdistamaan kuvan mukainen testirata. Robotti aloittaa menosuunta oikealle osoittaen vasemman yläkulman neliöstä, jota on merkitty kuvassa merkillä S, ja sen tulee käydä jokaisen neliön kohdalla ainakin kerran. Robotti voi liikkua kahden neliön välillä vain, jos näillä kahdella neliöllä on yhteinen sivu. Käytämäässäsi ohjelmostikielessä on käytössä seuraavat komennot ja kirjoitusasut:

Komennolla L; robotti liikkuu eteenpäin yhden askeleen viereiseen neliöön.

Komennolla K; robotti käännytty oikealle 90 astetta.

Komennolla N(X;Y;Z); robotti toistaa komentosarjan X;Y;Z; tasana N kertaa.



- a. Kirjoita testikoodi 3(3(L;);K;);2(L;) ilman toistorakennetta eli vain komentoja L; ja K; käyttämällä.
  
- b. Läpäiseekö robottipölynimuri testiradan tällä koodilla? Perustele.

**A2**

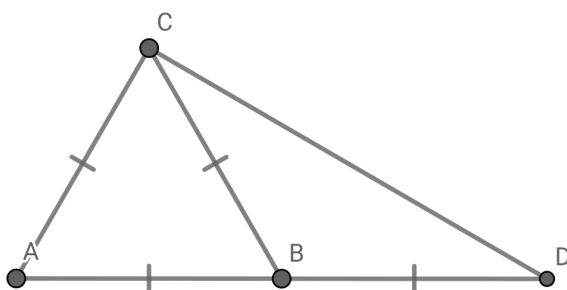
Ratkaise.

- a. Jos 5 konetta tuottaa 5 karkkia 5 minuutissa, kuinka monta karkkia 10 konetta tuottaa 10 minuutissa?
  
- b. Jos kääntäjä käänää keskimäärin 18 000 sanaa 20 päivässä, kuinka monta sanaa kääntäjä käänää 30 päivässä?
  
- c. Jos kaksi maalaria maalaa erään asunnon seinät 6 päivässä, kuinka monessa päivässä kolme maalaria olisi maalannut nämä seinät?

/3 p

**A3**

Osoita, että kolmio ACD on suorakulmainen.



/2 p



**A4**

Erään ranskalaisen kaupungin puistossa elää hevosia, kukkoja ja muurahaisia. Tiedetään, että näillä on yhteensä 1000 päätä ja 4940 jalkaa. Lisäksi tiedetään, että hevosia on kymmenesosa muurahaisten määrästä. Kuinka monta kukkoa puistossa on?

/2 p



**A5**

Olkoon  $x$  positiivinen luku, ja lausutaan positiivinen luku  $y$  luvun  $x$  avulla asettamalla

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}.$$

Lausu luku  $x$  luvun  $y$  avulla.

/2



**A6**

Eräään suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat  $a$  ja  $b$ , ja sen hypotenuusan pituus on 3. Laske tämän perusteella:

$$\frac{2^{a^2}}{0,5^{b^2}}$$

/2 p

# Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu

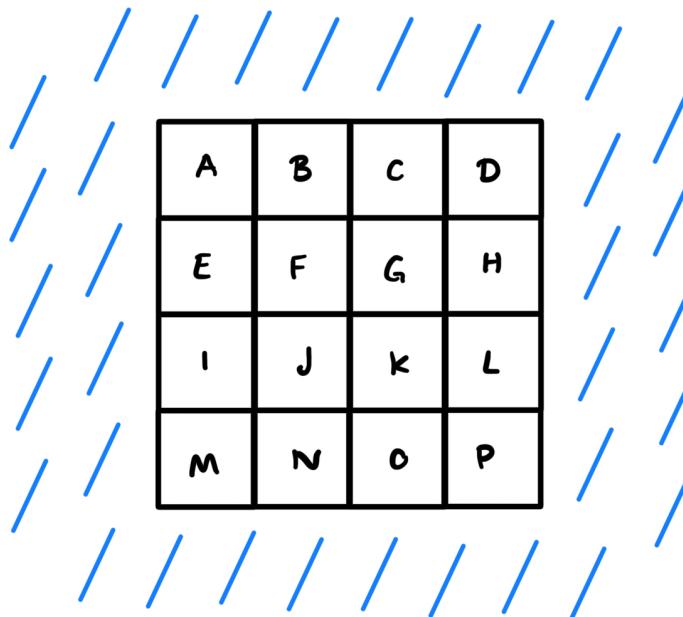
## Osa B



Etunimi: \_\_\_\_\_

Sukunimi: \_\_\_\_\_

Eräs yhteiskunta on jaoteltu neliön muotoisiin valtakuntiin. Neliöt ovat keskenään yhteneviä, ja yhden neliön pinta-ala on  $144 \text{ km}^2$ . Valtakuntien nimet ovat A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O ja P. Näistä A, B, C, D, H, L, P, O, N, M, I ja E sijaitsevat meren rannalla, muut taas sisämaassa. Valtakuntien kärjet kohtaavat kuten kuvassa.



B1

Selvitä koko yhteiskunnan pinta-ala.

/1 p



B2

Selvitä koko yhteiskunnan rantaviivan eli rannikon pituus.

/1 p

*Leikit perheesi teleporttauslaitteella, ja yhtäkkiä löydät itsesi siirtyneenä kuvan yhteiskuntaan ilman karttaa tai tietoa maamerkeistä. Valtakunta on vuoristoinen, eli et näe horisonttia missään ilmansuunnassa.*

Ilmoita vastauksesi seuraaviin prosenttiosuutena tai murtolukumuodossa.



**B3**

Millä todennäköisyydellä olet valtakunnassa sisämaassa eli valtakunnassa, jolla ei ole rantaviivaa?

/1 p



**B4**

Millä todennäköisyydellä olet valtakunnassa, jolla on tasan kaksi naapurivaltakuntaa?

/2 p



**B5**

Millä todennäköisyydellä olet valtakunnassa, joka on valtakunnan F naapuri?

/2 p



**B6**

Millä todennäköisyydellä olet valtakunnassa, joka on valtakunnan D tai N naapuri?

/2 p



**B7**

Millä todennäköisyydellä olet valtakunnassa, joka on joko valtakunnan F naapuri tai valtakunnan K naapuri muttei molempien?

/2 p

Olet tutustunut ennalta kyseisen yhteiskunnan elinkeinorakenteisiin, ja muistat ulkoa seuraavan taulukon tiedot.

valtakunta	elinkeinot
A	sienestys ja metsästys
B	sienestys, metsästys ja kaupankäynti
C	sienestys, metsästys ja kaupankäynti
D	sienestys ja metsästys
E	sienestys
F	metsästys ja kaupankäynti
G	metsästys ja kaupankäynti
H	sienestys
I	sienestys
J	metsästys ja kaupankäynti
K	metsästys ja kaupankäynti
L	sienestys
M	sienestys ja metsästys
N	sienestys ja metsästys
O	sienestys, metsästys ja kaupankäynti
P	sienestys, metsästys ja kaupankäynti



**B8**

Jos näet sienestäjän sienestämässä omassa valtakunnassaan, millä todennäköisyydellä olet rannikkovaltakunnassa?

/2 p



**B9**

Jos näet sienestäjän sienestämässä ja metsästääjän metsästämässä samassa valtakunnassa, millä todennäköisyydellä olet rannikkovaltakunnassa?

/4 p



**B10**

Jos näet kaupankäyjän käymässä kauppaa, millä todennäköisyydellä olet valtakunnan F naapurivaltakunnassa?

/4 p

# Peruskoulun matematiikkakilpailun loppukilpailu

## Osa C



**Etunimi:** \_\_\_\_\_

**Sukunimi:** \_\_\_\_\_



**C1**

Jos

$$1 \& 1 = 4$$

$$1 \& 2 = 7$$

$$2 \& 1 = 4$$

$$3 \& 1 = 6,$$

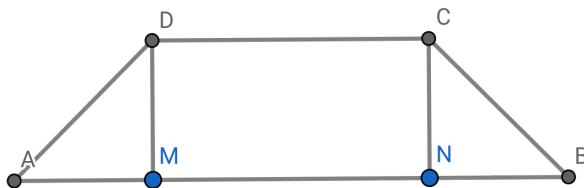
niin mikä luku sopii luvun  $x$  paikalle, kun  $x \& x = 10$ ? Perustele.

/6 p



**C2**

Kuvan puolisuunnikas koostuu kahdesta suorakulmaisesta tasakylikisestä kolmiosta ADM ja BCN sekä nelikulmiosta CDMN. Puolisuunnikkaan ABCD pinta-ala on  $102 \text{ cm}^2$  ja janan DM pituus on 6 cm. Selvitä janan CD pituus.



/6 p

**C3**

Olkoot  $p$  ja  $q$  erisuuria lukuja, ja oletetaan, että yhtälöillä

$$x^2 + px + q = 0 \text{ ja } x^2 + qx + p = 0$$

on yhteinen ratkaisu  $x = a$ . Osoita, että tällöin  $a$  on positiivinen kokonaisluku.

/6 p

**C4**

Olkoon  $n$  positiivinen nelinumeroinen kokonaisluku, ja olkoon  $R(n)$  se luku, joka saadaan, kun luvun  $n$  numeroiden järjestys käännetään. Esimerkiksi  $R(1258) = 8521$ .

Jos erotus  $R(n) - n$  on jaollinen kahdella ja viidellä, mitkä seuraavista väitteistä ovat totta ja mitkä eivät? Perustele.

- a. Luvun  $n$  ensimmäinen ja viimeinen numero ovat samoja.
- b. Luvun  $n$  viimeinen numero on 0.
- c. Erotus  $R(n) - n$  on jaollinen luvulla 3.
- d. Erotus  $R(n) - n$  on jaollinen luvulla 6.

/6 p



C5

Lukujonolle  $a_1, a_2, \dots$ , jonka peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, on voimassa

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Selvitä tämän avulla suurin alkuluku, jolla luku

$$1 + 2 + \dots + 999$$

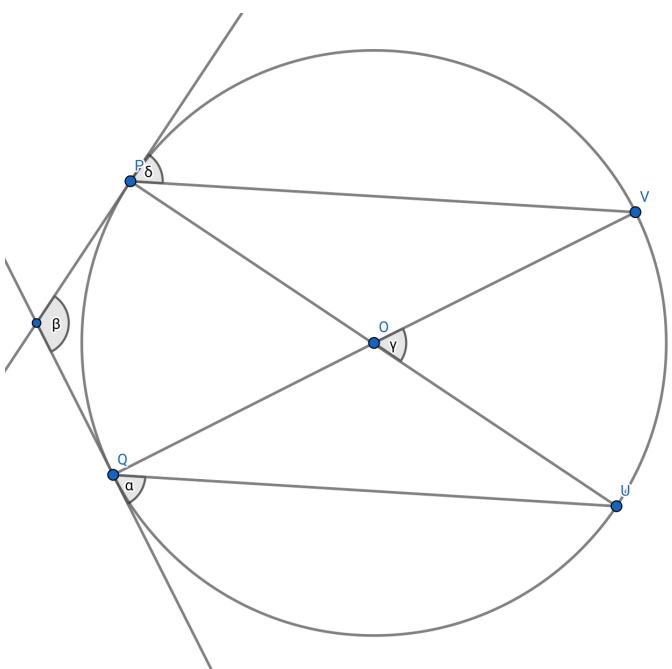
on jaollinen, ja selvitä osamääärä.

/6 p



C6

Selvitä kulmien  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\delta$  asteluvut, kun O on kuvan ympyrän keskipiste, kun janat QV ja PU ovat ympyrän halkaisijoita ja kun  $\alpha = 65^\circ$ .



/6 p

# Finalen för grundskolans matematiktävling

## Del A



Förnamn: \_\_\_\_\_

Efternamn: \_\_\_\_\_



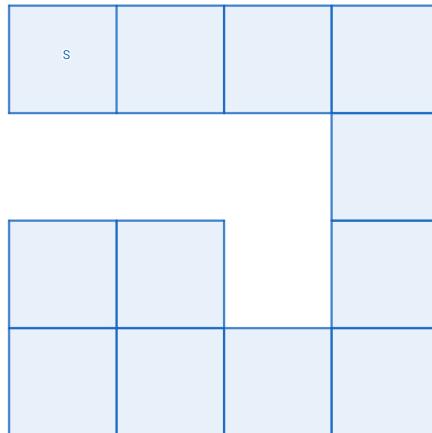
A1

Du har byggt en robotdammsugare och ditt mål är att programmera den så att den kan rengöra testbanan i bilden. Roboten är svängd till höger och börjar i den övre vänstra kvadraten som är markerad med tecknet S i bilden, roboten behöver besöka varje kvadrat åtminstone en gång. Roboten kan flytta sig mellan två kvadrater enbart om kvadraterna har en gemensam sida. I programmeringsspråket du använder har du tillgång till följande kommandon och syntax:

Kommando F; roboten flyttar sig framåt ett steg till grannkvadraten.

Kommando S; roboten svänger sig till höger 90 grader.

Kommando N(X;Y;Z);; roboten upprepar kommandoserien X;Y;Z; exakt N gånger.



- a. Skriv om testkoden `3(3(F);S);2(F);` utan repetitionsstrukturen, alltså så att enbart kommandona F; och S; används.
  
- b. Kommer roboten igenom testbanan med den här koden? Motivera.

**A2**

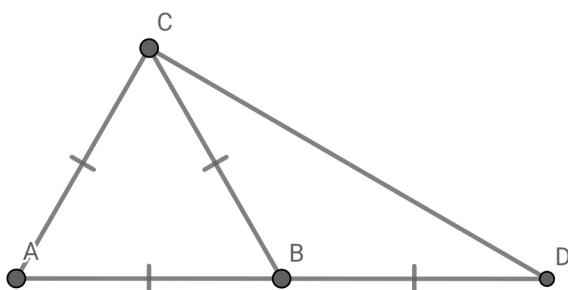
Lös.

- a. Om 5 maskiner tillverkar 5 godisbitar på 5 minuter, hur många godisbitar tillverkar 10 maskiner på 10 minuter?
  
- b. Om en översättare översätter i medeltal 18 000 ord på 20 dagar, hur många ord översätter översättaren på 30 dagar?
  
- c. Om två målare målar väggarna i en lägenhet på 6 dagar, hur många dagar skulle det ha tagit för tre målare att måla väggarna?

/3 p

**A3**

Visa att triangeln ACD är rätvinklig.



/2 p

**A4**

I en viss fransk stads park bor det hästar, tuppar och myror. Vi vet att de tillsammans har 1000 huvuden och 4940 ben. Dessutom vet man att antalet hästar är en tiondel av antalet myror. Hur många tuppar finns det i parken?

/2 p

**A5**

Låt  $x$  vara ett positivt tal, och vi uttrucker det positiva antalet  $y$  med hjälp av  $x$  genom

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$$

Skriv ett uttryck för  $x$  med hjälp av  $y$ .

/2 p



**A6**

En rätvinklig triangels kateter har längderna  $a$  och  $b$ , och dess hypotenusas längd är 3.  
Med hjälp av detta, beräkna

$$\frac{2^{a^2}}{0,5^{b^2}}$$

/2 p

# Finalen för grundskolans matematiktävling

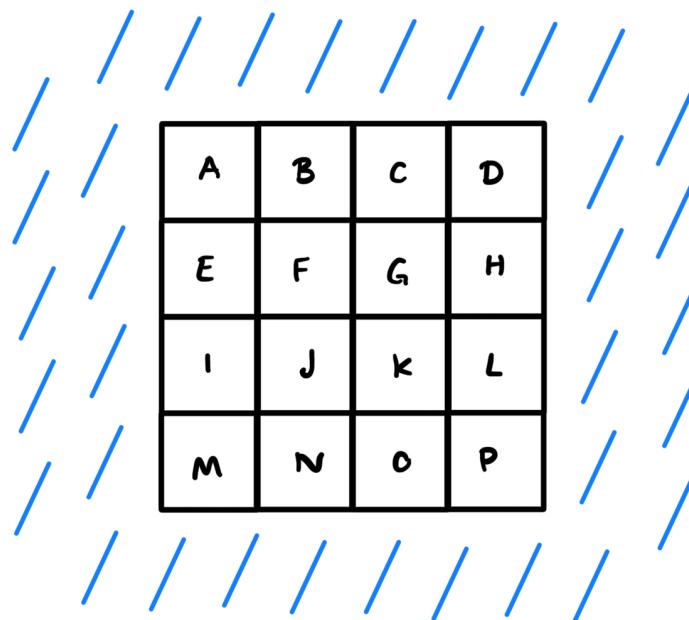
## Del B



Förnamn: \_\_\_\_\_

Efternamn: \_\_\_\_\_

Ett samhälle är indelat i kvadratformade riken. Kvadraterna är kongruenta och arean av en kvadrat är 144. Rikenas namn är A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O och P. Av dessa ligger A, B, C, D, H, L, P, O, N, M, I och E vid havet, resten är inne i landet. I bilden kan du se hur rikena kanter sammanfaller.



**B1**

Beräkna storleken av hela samhället.

/1 p



**B2**

Beräkna hur lång strandremsa samhället har, alltså den totala längden av alla stränder.

/1 p

*Du lekar med din familjs teleporteringsmaskin, och helt plötsligt befinner du dig i samhället i bilden utan en karta eller information om landmärken. Samhället är bergigt, du ser alltså inte horisonten åt något håll.*

*Ange svaren på följande uppgifter antingen som bråk eller procenttal.*



**B3**

Med vilken sannolikhet är du inne i landet, alltså i ett rike som inte har en strand?

/1 p



**B4**

Med vilken sannolikhet är du i ett rike som har exakt två grannriken?

/2 p



**B5**

Med vilken sannolikhet är du i ett rike som har riket F som granne?

/2 p



**B6**

Med vilken sannolikhet är du i ett rike som har riket D eller N som granne?

/2 p



**B7**

Med vilken sannolikhet är du i ett rike som är antingen granne med riket F eller granne med riket K men inte granne med båda?

/2 p

Du har bekantat dig med samhället tidigare och kommer ihåg följande information om rikenas industrier.



**B8**

Om du ser en svampplockare plocka svamp i sitt eget rike, vad är sannolikheten att du befinner dig i ett rike som gränsar till havet?

/2 p



**B9**

Om du ser en svampplockare plocka svamp och en jägare jaga i sitt eget rike, vad är sannolikheten att du befinner dig i ett rike som gränsar till havet?

/4 p

rike	industri
A	Svampplockning och jakt
B	Svampplockning, jakt och handel
C	Svampplockning, jakt och handel
D	Svampplockning och jakt
E	Svampplockning
F	Jakt och handel
G	Jakt och handel
H	Svampplockning
I	Svampplockning
J	Jakt och handel
K	Jakt och handel
L	Svampplockning
M	Svampplockning och jakt
N	Svampplockning och jakt
O	Svampplockning, jakt och handel
P	Svampplockning, jakt och handel



**B10**

Om du ser en handlare utföra handel, vad är sannolikheten att du befinner dig i ett grannrike till riket F?

# Finalen för grundskolans matematiktävling

## Del C



Förnamn: \_\_\_\_\_

Efternamn: \_\_\_\_\_



c1

Om

$$1 \& 1 = 4$$

$$1 \& 2 = 7$$

$$2 \& 1 = 4$$

$$3 \& 1 = 6,$$

vilket tal passar på talets x plats när  $x \& x = 10$ ? Motivera ditt svar.

/6 p



c2

Bildens paralleltrapets består av två rätvinkliga likbenta trianglar ADM och BCN samt rektangeln CDMN: Paralleltrapetset ABCD:s area är 102 och sträckan DM:s längd är 6 cm. Bestäm sträckan CD:s längd.



/6 p



C3

Låt p och q vara olika stora tal, och anta att ekvationerna

$$x^2 + px + q = 0 \text{ och } x^2 + qx + p = 0$$

har en gemensam lösning  $x = a$ . Visa att då är a ett positivt heltal.

/6 p



C4

Låt n vara ett positivt fyrsiffrigt heltal, och låt  $R(n)$  vara det tal som fås när man svänger ordningen på siffrorna i talet n. Till exempel  $R(1258)=8521$ .

Om differensen  $R(n) - n$  är delbar med två och fem, vilka av följande påståenden är sanna och vilka är inte? Motivera.

- a. Talet n:s första och sista siffra är samma.
- b. Talet n:s sista siffra är 0.
- c. Differensen  $R(n) - n$  är delbar med talet 3.
- d. Differensen  $R(n) - n$  är delbar med talet 6.

/6 p



C5

För talföljden  $a_1, a_2, \dots$ , som har en konstant differens mellan två element som kommer efter varandra, gäller det att

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Med stöd av detta, tta det största primtalet som delar talet

$$1 + 2 + \dots + 999$$

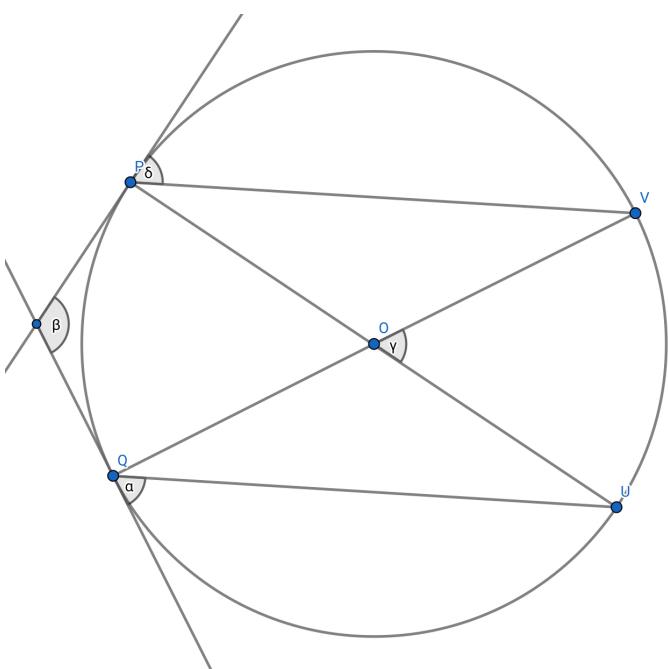
och bestäm kvoten.

/6 p



C6

Bestäm storleken på vinklarna  $\beta$ ,  $\gamma$  och  $\delta$ , när O är medelpunkten för cirkeln i bilden, sträckorna QV och PU är diameter till circkeln, samt när  $\alpha = 65^\circ$ .



/6 p

# Comprehensive school mathematics competition

## Final round part A



First name: \_\_\_\_\_

Last name: \_\_\_\_\_



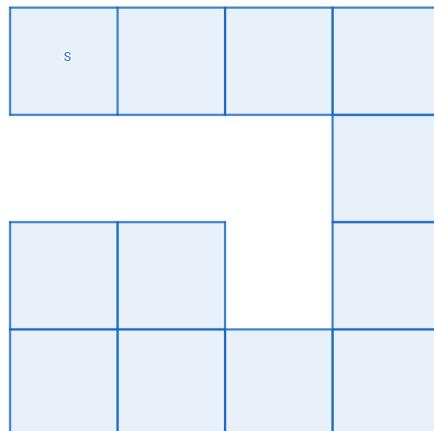
A1

You have built a robot vacuum cleaner, and your goal is to program it to complete the test circuit depicted in the image below. The robot, facing towards the right-hand side, starts on the top left square, marked by S in the image below, and it has to visit each square at least once. The robot is able to move from one square to another provided that the squares have a side in common. In the programming language you use, you have the following commands and syntax to work with:

With F; the robot takes a single step forward to the neighbouring square.

With R; the robot rotates towards the right by 90 degrees.

With N(X;Y;Z); the robot repeats the string of commands X;Y;Z; exactly N times.



- a. Rewrite the test code 3(3(F;);R;);2(F;) without the repetition structure, in other words by using the commands F; and R; only.
  
- b. Does the robot vacuum cleaner complete the test circuit with this code? Show your work.



**A2**

Solve.

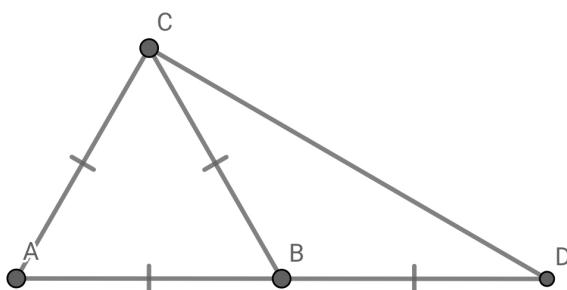
- a. If 5 machines produce 5 candies in 5 minutes, how many candies do 10 machines produce in 10 minutes?
  
- b. If a translator translates on average 18 000 words in 20 days, how many words does a translator translate in 30 days?
  
- c. If two painters paint the walls of an apartment in 6 days, in how many days would three painters have painted the walls?

/3 p



**A3**

Show that triangle ACD is a right triangle.



/2 p



**A4**

In a park in a certain French city, there are horses, roosters, and ants. It is known that they have 1000 heads and 4940 legs combined. Furthermore, it is known that the number of horses is a tenth of the number of ants. How many roosters are there in the parc?

/2 p



**A5**

Let  $x$  be a positive number, and let us express another positive number  $y$  in terms of  $x$  by setting

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}.$$

Express  $x$  in terms of  $y$ .

/2

**A6**

The lengths of the legs (catheti) of a right triangle are  $a$  and  $b$ , and the length of its hypotenuse is 3. With this information, calculate

$$\frac{2^{a^2}}{0,5^{b^2}}$$

/2 p

# Comprehensive school mathematics competition

## Final round part B

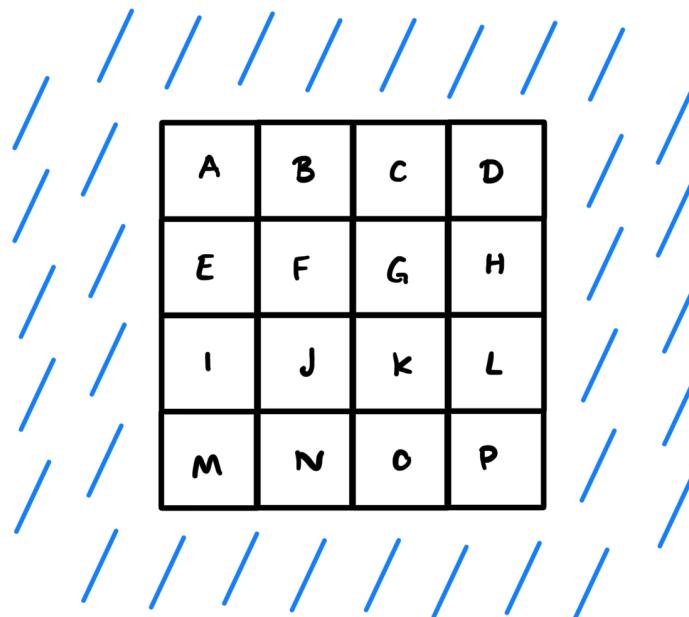


First name: \_\_\_\_\_

Last name: \_\_\_\_\_

A certain society is divided into square-shaped realms. The squares are congruent, and the area of a square is  $144 \text{ km}^2$ . The names of the realms are A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, and P.

Out of these, realms A, B, C, D, H, L, P, O, N, M, I, and E are on the coast, and the others are inland. The vertices of the realms coincide as in the image.



B1

Figure out the area of the society.

/1 p



B2

Figure out the length of the coastal line of the society, or, in other words, the length of its shore.

/1 p

*You play around with a teleportation device of your family's, and suddenly you find yourself transported to the society without a map or any knowledge of landmarks. The society is mountainous, so you are not able to see the horizon in any direction.*

Indicate the answer to the following as a fraction or as a percentage.



**B3**

What is the probability that you are inland, i.e. in a realm with no coast?

/1 p



**B4**

What is the probability you are in a realm that has exactly two neighbouring realms?

/2 p



**B5**

What is the probability that you are in a realm neighbouring realm F?

/2 p



**B6**

What is the probability that you are in a realm neighbouring realm D or realm N?

/2 p



**B7**

What is the probability that you are in a realm neighbouring either realm F or realm K but not both?

/2 p

You have prior knowledge of the society's economic structure, and you are able to remember the following details by heart.

realm	livelihood
A	mushrooming and hunting
B	mushrooming, hunting and trading
C	mushrooming, hunting and trading
D	mushrooming and hunting
E	mushrooming
F	hunting and trading
G	hunting and trading
H	mushrooming
I	mushrooming
J	hunting and trading
K	hunting and trading
L	mushrooming
M	mushrooming and hunting
N	mushrooming and hunting
O	mushrooming, hunting and trading
P	mushrooming, hunting and trading



**B8**

If you see a forager mushrooming in their own realm, what is the probability that you are in a coastal realm?

/2 p



**B9**

If you see a forager mushrooming and a hunter hunting in the same realm, what is the probability that you are in a coastal realm?

/4 p



**B10**

If you see a trader trading, what is the probability that you are in a realm neighbouring realm F?

/4 p

# Comprehensive school mathematics competition

## Final round part C



First name: \_\_\_\_\_

Last name: \_\_\_\_\_



c1

If

$$1 \& 1 = 4$$

$$1 \& 2 = 7$$

$$2 \& 1 = 4$$

$$3 \& 1 = 6,$$

then what number can x be replaced by when  $x \& x = 10$ ? Show your work.

/6 p



c2

The parallelogram depicted below consists of two right isosceles triangles ADM and BCN, and the quadrilateral CDMN. The area of the parallelogram ABCD is  $102 \text{ cm}^2$  and the length of the line segment DM is 6 cm. Figure out the length of the line segment CD.



/6 p

**C3**

Let  $p$  and  $q$  be numbers that are not equal, and let us assume that the equations

$$x^2 + px + q = 0 \text{ ja } x^2 + qx + p = 0$$

have a solution  $x = a$  in common. Show that this implies that  $a$  is a positive whole number.

/6 p

**C4**

Let  $n$  be a positive four-digit whole number, and let  $R(n)$  be the number that is obtained by reversing the order of the digits of  $n$ . For example,  $R(1258) = 8521$ .

If the difference  $R(n) - n$  is divisible by two and by five, which of the following statements are true and which are false? Show your reasoning.

- a. The first and the last digit of  $n$  are equal.
- b. The last digit of  $n$  is 0.
- c. The difference  $R(n) - n$  is divisible by 3.
- d. The difference  $R(n) - n$  is divisible by 6.

/6 p



C5

For a sequence of numbers  $a_1, a_2, \dots$  for which the difference of consequent elements is constant, the following equality holds:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Use this to figure out the greatest prime number by which the number

$$1 + 2 + \dots + 999$$

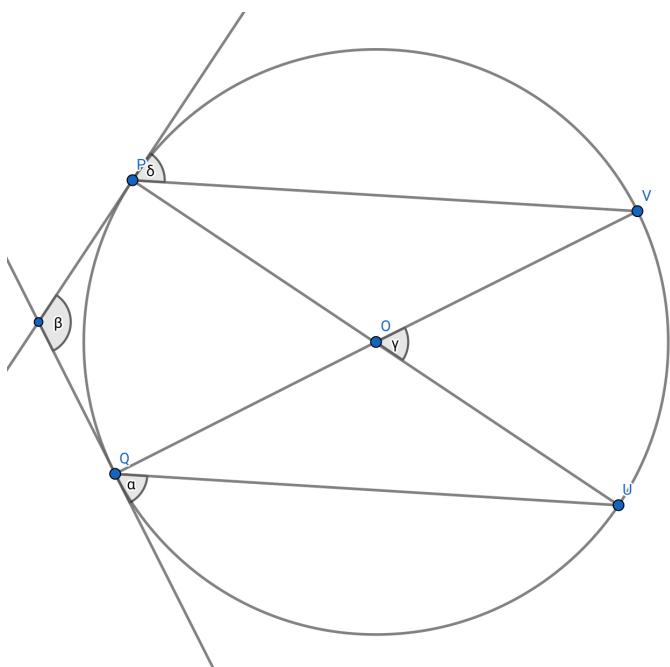
is divisible, and find the quotient.

/6 p



C6

Calculate  $\beta$ ,  $\gamma$ , and  $\delta$  in degrees when O is the centre of the depicted circle, when line segments QV and PU are its diameters and when  $\alpha = 65^\circ$ .



/6 p

# Matemaatikavõistluse lõpp-voor

## Osa A



Eesnimi: \_\_\_\_\_

Perekonnanimi: \_\_\_\_\_



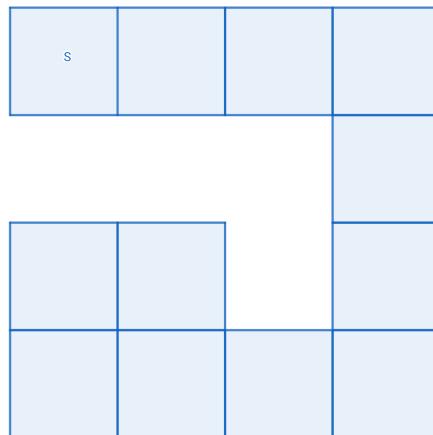
A1

Te olete ehitanud robottolmuimeja ja teie eesmärk on programmeerida see nii, et see suudaks koristada joonisel näidatud katserada. Robot, mis on suunatud paremale poole, stardib vasakpoolsest ülemisest ruudust, mis on alloreval joonisel tähistatud tähega S, ja ta peab külastama iga ruutu vähemalt üks kord. Robot saab liikuda kahe ruudu vahel ainult siis, kui nendel ruutudel on ühine külg. Kasutatavas programmeerimiskeeles on järgmised käsklused ja tähindused:

Käsklusega L; robot liigub ühe sammu võrra ette poole naaberruutu.

Käsklusega P; robot pöörab 90 kraadi paremale.

Käsklusega N(X;Y;Z);; robot kordab käskude jada X;Y;Z; täpselt N korda.



- Kirjutage testkood 3(3(L;);P;);2(L;) ilma korduva struktuurita, st kasutades ainult käskke L; ja P;.
- Kas robottolmuimeja läbib selle koodiga katseraja? Põhjendage.

**A2**

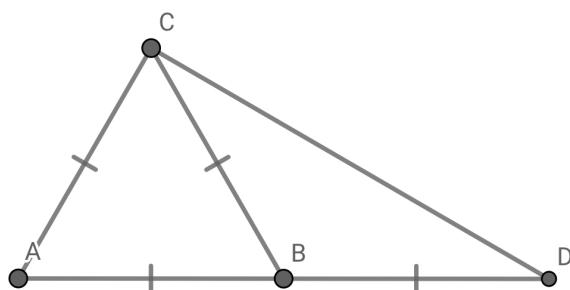
Lahenda.

- a. Kui 5 masinat toodab 5 kommi 5 minuti jooksul, siis mitu kommi toodavad 10 masinat 10 minuti jooksul?
  
- b. Kui tõlkija tõlgib keskmiselt 18 000 sõna 20 päeva jooksul, siis mitu sõna tõlgib sama tõlkija 30 päeva jooksul?
  
- c. Kui kaks maalrit värvivad korteri seinad 6 päevaga, siis mitme päevaga oleks kolm maalrit need seinad värvinud?

/3 p

**A3**

Näita, et kolmnurk ACD on täisnurkne.



/2 p



**A4**

Mingis Prantsuse linnas asuvas pargis elavad hobused, kuked ja sipelgad. On teada, et neil on kokku 1000 pead ja 4940 jalga. Lisaks on teada, et hobuste arv on kümnendik sipelgate arvust. Kui palju on pargis kukkesid?

/2 p



**A5**

Olgu  $x$  positiivne arv. Lisaks esitatakse positiivset arvu  $y$  arvu  $x$  kaudu järmise seose abil

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}.$$

Alvalda arvu  $x$  arvu  $y$  kaudu.

/2



**A6**

Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused on  $a$  ja  $b$  ning hüpotenuusi pikkus on 3. Selle teabe põhjal arvuta välja järgmisse avaldise väärthus:

$$\frac{2^{a^2}}{0,5^{b^2}}$$

/2 p

# Matemaatikavõistluse lõpp-voor

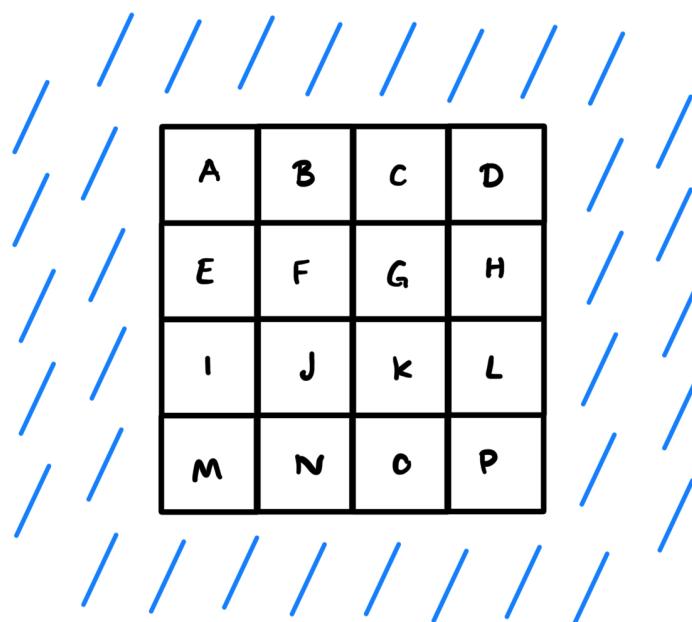
## Osa B



Eesnimi: \_\_\_\_\_

Perekonnanimi: \_\_\_\_\_

Üks impeerium on jagatud ruudukujulisteks vürstiriikideks. Ruudud on võrdsed ja iga ruudu pindala on  $144 \text{ km}^2$ . Vürstiriigid kannavad nimesid A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O ja P. Neist A, B, C, D, H, L, P, O, N, M, I ja E asuvad mere rannikul, teised aga sisemaal. Vürstiriikide tipud kohtuvad, nagu on näidatud joonisel.



**B1**

Selgita välja kogu impeeriumi pindala.

/1 p



**B2**

Arvuta välja kogu impeeriumi rannajoone pikkus ehk teisisõnu tema kalda pikkus.

/1 p

*Mängid oma pere teleportatsiooniseadmega ja äkki leiad end pildil olevasse impeeriumi kantuna ilma kaardi ega mingite teadmisteta maamärkidest. Impeerium on mägine, mis tähendab, et sa ei näe horisonti üheski suunas.*

Järgmistele ülesannetele märgi vastus murdosa või protsendina.



**B3**

Kui suur on tõenäosus, et oled sisemaal, st ilma rannikuta vürstiriigis?

/1 p



**B4**

Kui suur on tõenäosus, et sa oled vürstiriigis, millel on täpselt kaks naabrit?

/2 p



**B5**

Milline on tõenäosus, et asud vürstiriigi F naaberriigis?

/2 p



**B6**

Kui suur on tõenäosus, et asud vürstiriigis, mille naabriks on D või N?

/2 p



**B7**

Kui suur on tõenäosus, et sa oled vürstiriigis, mis on kas riigi F või riigi K naabriks, kuid mitte mõlema jaoks?

/2 p

Tunned lõpuks kõnealuse impeeriumi riikide majandusstruktuuri ja oled meelde jätnud järgmises tabelis esitatud info.

Vürstiriik	Tegevusalad
A	seente kasvatamine ja jahindus
B	seente kasvatamine, jahindus ja kaubandus
C	seente kasvatamine, jahindus ja kaubandus
D	seente kasvatamine ja jahindus
E	seente kasvatamine
F	jahindus ja kaubandus
G	jahindus ja kaubandus
H	seente kasvatamine
I	seente kasvatamine
J	jahindus ja kaubandus
K	jahindus ja kaubandus
L	seente kasvatamine
M	seente kasvatamine ja jahindus
N	seente kasvatamine ja jahindus
O	seente kasvatamine, jahindus ja kaubandus
P	seente kasvatamine, jahindus ja kaubandus



**B8**

Kui näed seenekasvatajat oma vürstiriigis seeni korjamas, siis kui suur on töenäosus, et oled rannikuriigis?

/2 p



**B9**

Kui näed ühes ja samas vürstiriigis seenekasvatajat ja jahimeest, siis kui suur on töenäosus, et te olete rannikuriigis?

/4 p



**B10**

Kui näed kauplejat kauplemas, siis kui suur on tõenäosus, et oled vürstiriigi F naaberriigis?

/4 p

# Matemaatikavõistluse lõpp-voor

## Osa C

Eesnimi: \_\_\_\_\_

Perekonnanimi: \_\_\_\_\_



c1

On teada, et

$$1 \& 1 = 4$$

$$1 \& 2 = 7$$

$$2 \& 1 = 4$$

$$3 \& 1 = 6,$$

Millise arvuga peab asendama muutuja  $x$  et kehtiks  $x \& x = 10$ ? Selgita oma lahendust.

/6 p



c2

Pildil olev trapets koosneb kahest täisnurksest võrdhaarsest kolmnurgast ADM ja BCN ning ristikülikust CDMN. Trapetsi ABCD pindala on  $102 \text{ cm}^2$  ja lõigu DM pikkus on 6 cm. Leia lõigu CD pikkus.



/6 p



**C3**

Olgu  $p$  ja  $q$  kaks erinevat arvu ning elldame, et kahel võrrandil

$$x^2 + px + q = 0 \text{ ja } x^2 + qx + p = 0$$

on üks lahend  $x = a$  ühine. Näidake, et  $a$  pead olema positiivne täisarv.

/6 p



**C4**

Olgu  $n$  mingi neljakohaline täisarv ning olgu  $R(n)$  arv, mis saadakse arvust  $n$ , kui ta numbrid panna kirja vastupidises järjekorras. Näiteks  $R(1258) = 8521$ .

Kui vahe  $R(n) - n$  jagub arvuga 2 ja ka arvuga 5, siis millised järgmistest väidetest on tõesed ja millised mitte? Põhjendage.

- a. Arvu  $n$  esimene ja viimane number on samad.
- b. Arvu  $n$  viimane number on 0.
- c. Vahe  $R(n) - n$  jagub arvuga 3.
- d. Vahe  $R(n) - n$  jagub arvuga 6.

/6 p



C5

Kui meil on arv jada  $a_1, a_2, \dots$ , mille kahe järjestikuse liikme erinevus on muutumatu, siis on kehtib järgmine valem:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Kasutade seda valemit, et leida suurim algarv, millega arv

$$1 + 2 + \dots + 999$$

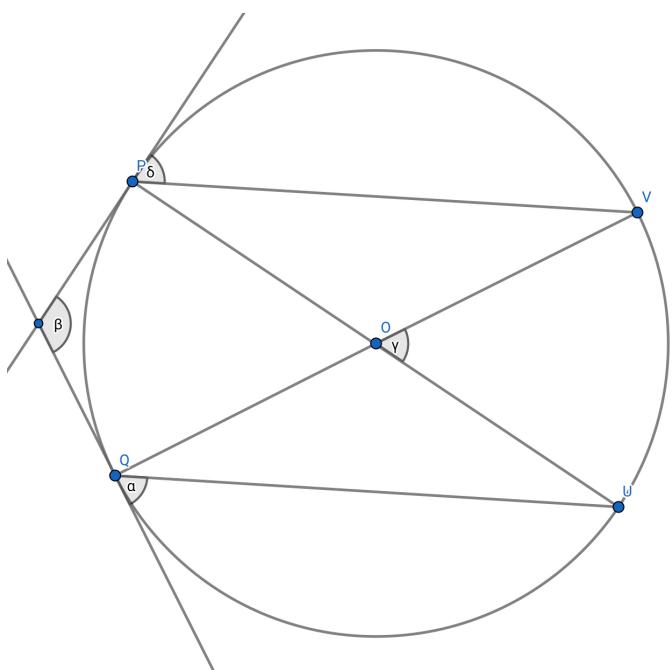
on jaguv, ja leidke jagatis.

/6 p



C6

Leidke nurgad  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\delta$ , kui O on pildil kujutatud ringi keskpunkt, kui jooned QV ja PU on ringi läbimõodud ja kui  $\alpha = 65^\circ$ .



/6 p

## Esimerkkivastaukset

A1

a.

Auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned} & 3(3(L);K);2(L;) \\ & = 3(L;L;L;K);2(L;) \\ & = L;L;L;K;L;L;K;L;L;K;L;L; \end{aligned}$$

b.

Ei, sillä ensimmäinen toistorakenne vie robotin vasempaan alakulmaan mutta toinen toistorakenne saa robotin kulkemaan vain yhden askeleen ylöspäin.

A2

a.

Tuotettujen karkkien lukumäärä on suoraan verrannollinen koneiden määrään sekä kulutettuun aikaan. Siis

$$5 \text{ karkkia} \cdot 10 \text{ konetta} / 5 \text{ konetta} \cdot 10 \text{ min} / 5 \text{ min} = 5 \cdot 4 \cdot 4 \text{ karkkia}$$

eli 80 karkkia.

b.

$$18\ 000 \text{ sanaa} / 20 \text{ päivää} \cdot 30 \text{ päivää} = 18\ 000 \text{ sanaa} \cdot 1,5 = 27\ 000 \text{ sanaa.}$$

c.

Tehdyn työn määrä on  $2 \text{ henkilöä} \cdot 6 \text{ päivää} = 12 \text{ henkilöypäivää}$ , joten haettu aika on  $12 \text{ henkilöypäivää} / 3 \text{ henkilöä} = 4 \text{ työpäivää}$ .

A3

Kolmio ABC on tasasivuinen ja BCD tasakytkinen. Täten  $BAC = ACB = CBA = 60^\circ$  ja  $BCD = CDB$ . Koska DBA on oikokulma,  $DBC + CBA = 180^\circ$  ja siis tasakytkisen kolmion huippukulmana  $DBC = 120^\circ$ . Koska  $DBC + BCD + CDB = 180^\circ$ , tästä seuraa, että kantakulmien suuruus on  $BCD = CDB = 30^\circ$ . Siis

$$DCA = DCB + BCA = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

mistä väite seuraa.

A4

Ensimmäisistä kahdesta tiedosta saadaan yhtäsuuruus

$$k + h + m = 1000$$

$$2k + 4h + 6m = 4940$$

$$k + h + m = 1000$$

$$k + 2h + 3m = 2470$$

$$h + 2m = 1470.$$

Viimeisestä tiedosta saadaan yhtäsuuruus  $m = 10h$ , joten

$$1470 = h + 2 \cdot 10h = 21h$$

ja siis  $h = 1470 / 21 = 70$ . Seuraaksena  $m = 10 \cdot 70 = 700$  ja siis

$$k + 70 + 700 = 1000$$

$$k + 770 = 1000$$

$$k = 1000 - 770$$

$$k = 230.$$

Kukkoja on siis 230.

A5

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}} = \sqrt{x + y}$$

$$y^2 = x + y$$

$$x = y^2 - y$$

A6

Pythagoraan lauseen nojalla  $a^2 + b^2 = 3^2 = 9$ , joten

$$2^a a^2 / 0,5^b b^2$$

$$= 2^a a^2 / (1/2)^b b^2$$

$$= 2^a a^2 / 2^{-b} b^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{\wedge}(a^2 - (-b^2)) \\
 &= 2^{\wedge}(a^2 + b^2) \\
 &= 2^{\wedge}9 \\
 &= 512.
 \end{aligned}$$

B1

$$A_{\text{kok}} = 16 \cdot 144 \text{ km}^2 = 2304 \text{ km}^2$$

B2

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{A} = \sqrt{144 \text{ km}^2} = 12 \text{ km} \\
 p &= 16 \cdot 12 \text{ km} = 192 \text{ km}
 \end{aligned}$$

B3

$$\begin{aligned}
 P(\text{sisämaa}) \\
 &= P(F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K) = 4/16 = 1/4 = 0,25 = 25 \%
 \end{aligned}$$

B4

$$\begin{aligned}
 P(\text{tasan kaksi naapuria}) \\
 &= P(A \text{ tai } D \text{ tai } M \text{ tai } P) = 4/16 = 1/4 = 0,25 = 25 \%
 \end{aligned}$$

B5

$$\begin{aligned}
 P(F \text{ naapuri}) \\
 &= P(B \text{ tai } E \text{ tai } G \text{ tai } J) = 4/16 = 1/4 = 0,25 = 25 \%
 \end{aligned}$$

B6

$$\begin{aligned}
 P(D \text{ naapuri tai N naapuri}) \\
 &= P(C \text{ tai } H \text{ tai } M \text{ tai } J \text{ tai } O) = 5/16 = 0,3125 = 31,25 \%
 \end{aligned}$$

B7

$$\begin{aligned}
 P((F \text{ naapuri tai K naapuri}) \text{ ja ei } (F \text{ naapuri ja K naapuri})) \\
 &= P((B \text{ tai } E \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } L \text{ tai } O) \text{ ja ei } (G \text{ tai } J)) \\
 &= P(B \text{ tai } E \text{ tai } L \text{ tai } O) \\
 &= 4/16 = 1/4 = 0,25 = 25 \%
 \end{aligned}$$

B8

$$\begin{aligned}
 P(\text{rannikolla} | \text{sienestys}) \\
 &= P(\text{rannikko ja sienestys}) / P(\text{sienestys}) \\
 &= P((A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } E \text{ tai } H \text{ tai } I \text{ tai } L \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) \text{ ja ei } (F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K)) / P(\text{ei } (F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K)) \\
 &= P(A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } E \text{ tai } H \text{ tai } I \text{ tai } L \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) / P(\text{ei } (F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K)) \\
 &= 12/16 / (12/16) = 1 = 100 \%
 \end{aligned}$$

B9

$$\begin{aligned}
 P(\text{rannikolla} | \text{sienestys ja metsästys}) \\
 &= P(\text{rannikko ja sienestys ja metsästys}) / P(\text{sienestys ja metsästys}) \\
 &= P((A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } E \text{ tai } H \text{ tai } I \text{ tai } L \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) \text{ ja } (A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P)) / P(A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) \\
 &= P(A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) / P(A \text{ tai } B \text{ tai } C \text{ tai } D \text{ tai } M \text{ tai } N \text{ tai } O \text{ tai } P) \\
 &= 8/16 / (8/16) = 1 = 100 \%
 \end{aligned}$$

B10

$$\begin{aligned}
 P(F \text{ naapuri} | \text{kaupankäynti}) \\
 &= P(F \text{ naapuri ja kaupankäynti}) / P(\text{kaupankäynti}) \\
 &= P((B \text{ tai } E \text{ tai } G \text{ tai } J) \text{ ja } (B \text{ tai } C \text{ tai } F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K \text{ tai } O \text{ tai } P)) / P(B \text{ tai } C \text{ tai } F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K \text{ tai } O \text{ tai } P) \\
 &= P(B \text{ tai } G \text{ tai } J) / P(B \text{ tai } C \text{ tai } F \text{ tai } G \text{ tai } J \text{ tai } K \text{ tai } O \text{ tai } P) \\
 &= 3/16 / (8/16) \\
 &= 3/8 = 0,375 = 37,5 \%
 \end{aligned}$$

### C1

Oletetaan, että luvuille c, d on voimassa  $c + d = ac + bd$  joillekin luvuille a, b. Tällöin

$$a + b = 4$$

$$\Rightarrow a = 4 - b$$

$$a + 2b = 7$$

$$\Rightarrow 4 - b + 2b = 7$$

$$\Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 1$$

Näille arvoille on myös voimassa

$$2a + b = 4$$

$$3a + b = 6$$

$$x + 3x = 10$$

$$4x = 10$$

$$x = 2,5$$

### C2

Koska kolmiot ADM ja BCN ovat suorakulmaisia ja tasakylkisiä, kummankin niistä pinta-ala on  $6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} / 2 = 36 \text{ cm}^2 / 2$  ja siis yhteensä  $36 \text{ cm}^2$ . Näin ollen nelikulmion CDMN pinta-ala on  $102 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = 66 \text{ cm}^2$ .

Koska kulma DMA on suora, sen vieruskulma NMD on myös suora. Täten jana DM on puolisuunnikkaan ABCD ja nelikulmion CDMN korkeusjana. Toisaalta kolmion ADM tasakylkisyden perusteella  $DM = AM = 6 \text{ cm}$ . Koska  $DM \cdot CD = 66 \text{ cm}^2$ , saadaan  $CD = 66 \text{ cm}^2 / 6 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$ .

### C3

$$P(a) = 0 = Q(a)$$

$$pa + q = qa + p$$

$$(p - q)a = p - q$$

$$a = (p - q) / (p - q) = 1,$$

joka on positiivinen kokonaisluku.

### C4

Olkoon n = abcd. Tällöin R(n) = dcba ja

$$R(n) - n$$

$$= dcba - abcd$$

$$= 1000d + 100c + 10b + a - 1000a - 100b - 10c - d$$

$$= 999d + 90c - 90b + a - d.$$

Koska tämä erotus on jaollinen luvuilla 2 ja 5, se on jaollinen luvulla 10 ja siis a = d (eli a. on totta).

Siis

$$R(n) - n$$

$$= 99d + 90c - 90b$$

$$= 9(11d + 10c - 10b).$$

Erotus on siis jaollinen luvuilla 3 sekä 9 (eli c. on totta) ja luvulla 2 jaollisuuden perusteella myös luvulla 6 (eli d. on totta).

Tehtävänanto sitoo luvun n ensimmäisen ja viimeisen numeron samaksi luvuksi. Jos viimeinen numero on 0, myös ensimmäinen numero on 0, jolloin n ei ole nelinumeroinen (eli b. ei ole totta).

Vastaus: a. on totta, b. ei ole totta, c. on totta, d. on totta.

### C5

Hyödyntämällä annettua kaavaa saadaan

$$1 + 2 + \dots + 999$$

$$= 999(1 + 999) / 2$$

$$= 999 \cdot 1000 / 2$$

$$= 999 \cdot 500$$

$$= 3^2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 37.$$

Suurin alkuluku on siis 37 ja osamäärä vastaavasti  $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 13\,500$ .

C6

Ympyrän säteen ja tangetin välinen kulma on suora. Tästä seuraa, että  $UQO = 90^\circ - \alpha = 25^\circ$ . Tämä on ympyrän kehäkulma, ja samaa kaarta vastaavana keskuskulmana  $\gamma = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$ . Vastaavasti kehäkulmaksi saadaan  $OPV = 25^\circ$  ja vastaavasti  $\delta = 65^\circ$ .

Kuvioon muodostuu nelikulmio, jonka kulmat ovat  $\beta$ , kulman  $\gamma$  ristikkulma sekä kaksi suoraa kulmaa. Siis  $\beta = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ .