Utdanningsdirektoratet

Eksamen

24.11.2017

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2\sin 3x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

c) $h(x) = x\cos x^2$

Oppgåve 2 (5 poeng)

Bestem integrala

a) $\int (x^3 - 3x + 2)\ dx$

b) $\int xe^{2x}\ dx$

c) $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$

Oppgåve 3 (4 poeng)

Løys dei trigonometriske likningane

a) $2\sin(2x) - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0,\ 2\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \quad , \quad x \in [0,\ 2\pi]$

Oppgåve 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \quad , \qquad x \in \langle -1\,,\,5 \rangle$$

a) Bestem toppunkta og botnpunkta på grafen til f.

b) Lag ei skisse av grafen til f.

c) Bestem arealet av området som er avgrensa av grafen til f, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 4$.

Oppgåve 5 (8 poeng)

Gitt punkta $A(1\,,\,0\,,\,3)$, $B(3\,,\,2\,,\,-1)$ og $C(0\,,\,4\,,\,4)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Vis at punkta A, B og C ligg i planet α gitt ved likninga

$$9x + y + 5z = 24$$

Ei linje ℓ står normalt på planet α og går gjennom punktet $T(11\,,\,7\,,\,5)$.

c) Bestem ei parameterframstilling for linja ℓ. Bestem skjeringspunktet mellom linja ℓ og planet α.

d) Bestem volumet av pyramiden *ABCT.*

Oppgåve 6 (3 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y'' - 9y' - 10y = 0$$

når $y(0) = 4$ og $y'(0) = 7$

Oppgåve 7 (5 poeng)

Ei aritmetisk talfølgje a_n er definert ved at $a_n = 3n - 2$

La $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

a) Bruk formelen for summen av ei aritmetisk rekkje til å vise at

$$s_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Bruk induksjon til å bevise formelen for s_n som er gitt i oppgåve a).

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Eit firma skal setje opp ein stolpe. Det gjer dei ved å slå stolpen ned i jorda med ei pælemaskin.

Det første slaget slår stolpen 12 cm ned i jorda. Dei neste slaga fører stolpen vidare nedover, men stadig kortare for kvar gong. Det viser seg at lengda som stolpen blir slått ned i jorda, blir redusert med 6,0 % for kvart slag.

a) Kor mange slag må dei minst slå for å få stolpen meir enn 1,0 m ned i jorda?

b) Kan firmaet klare å slå stolpen så mykje som 2,2 m ned i jorda med denne pælemaskina?

Oppgåve 2 (6 poeng)

Ei linje ℓ går gjennom punkta $A(7\,,\,12\,,\,12)$ og $B(1\,,\,-6\,,\,-12)$.

a) Bestem ei parameterframstilling for linja ℓ.

Ei kuleflate K har sentrum i origo og radius 5.

b) Bestem skjeringspunkta mellom linja ℓ og kuleflata K.

Eit plan α er gitt ved

$$\alpha:\ 4x-3y+7=0$$

Det er to plan som er parallelle med α, og som samtidig tangerer kuleflata K.

c) Bestem likninga for kvart av desse plana.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Bestanden av aure i eit bestemt fiskevatn minkar kontinuerleg med 3,0 % per år.
Vi går ut frå at det er 10 000 aurar i vatnet ved starten av 2018.

a) Forklar at differensiallikninga gitt ved

$$y' = -0{,}03y \quad , \quad y(0) = 10\,000$$

kan brukast til å bestemme aurebestanden $y(t)$ i vatnet t år etter starten av 2018.

b) Løys differensiallikninga.
Kor mange aurar vil det vere i vatnet i 2028?

Den lokale fiskeforeininga ønskjer å setje ut ei fast mengd med aurar i vatnet kvart år i 10 år framover. Utsetjinga startar tidleg i 2018 og skjer kontinuerleg over tiårsperioden. Målet er at det ved starten av 2028 skal vere 15 000 aurar i vatnet.

c) Set opp og grunngi ei differensiallikning som kan brukast til å bestemme kor mange aurar dei må setje ut kvart år for å nå målet.

d) Kor mange aurar må dei setje ut kvart år for å nå målet?

Oppgåve 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\sqrt{2^2-x^2} \quad , \quad x\in[-2,\ 2]$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f.
Teikn også inn linja gitt ved $g(x)=f(1)$ i same koordinatsystem som grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme arealet av sirkelsegmentet avgrensa av grafane til f og g.

Vi dreier dette sirkelsegmentet 360° om x-aksen.

c) Bruk CAS til å bestemme volumet av omdreiingslekamen vi da får.

Funksjonen F er gitt ved

$$F(x)=\sqrt{r^2-x^2} \quad , \quad x\in[-r,\ r] \quad , \quad r>1\,.$$

Linja gitt ved $G(x)=F(1)$ skjer grafen til F i punkta $(-1,\ F(-1))$ og $(1,\ F(1))$.
Området mellom grafane til F og G er eit sirkelsegment. Vi roterer dette sirkelsegmentet 360° om x-aksen.

d) Vis ved hjelp av CAS at volumet av omdreiingslekamen vi da får, er uavhengig av r.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\sin 3x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

c) $h(x) = x\cos x^2$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^3 - 3x + 2)\ \mathrm{d}x$

b) $\int xe^{2x}\ \mathrm{d}x$

c) $\int x\sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

Løs de trigonometriske likningene

a) $2\sin(2x) - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \quad , \qquad x \in \langle -1,\, 5 \rangle$$

a) Bestem toppunktene og bunnpunktene på grafen til f.

b) Lag en skisse av grafen til f.

c) Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f, *x*-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 4$.

Oppgave 5 (8 poeng)

Gitt punktene $A(1\,,\,0\,,\,3)$, $B(3\,,\,2\,,\,-1)$ og $C(0\,,\,4\,,\,4)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Vis at punktene A, B og C ligger i planet α gitt ved likningen

$$9x + y + 5z = 24$$

En linje ℓ står normalt på planet α og går gjennom punktet $T(11,\,7,\,5)$.

c) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ. Bestem skjæringspunktet mellom linjen ℓ og planet α.

d) Bestem volumet av pyramiden *ABCT.*

Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y'' - 9y' - 10y = 0$$

når $y(0) = 4$ og $y'(0) = 7$

Oppgave 7 (5 poeng)

En aritmetisk tallfølge a_n er definert ved at $a_n = 3n - 2$.

La $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

a) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å vise at

$$s_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Bruk induksjon til å bevise formelen for s_n som er gitt i oppgave a).

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Et firma skal sette opp en stolpe. Det gjør de ved å slå stolpen ned i jorda med en pælemaskin.

Det første slaget slår stolpen 12 cm ned i jorda. De neste slagene fører stolpen videre nedover, men stadig kortere for hver gang. Det viser seg at lengden som stolpen blir slått ned i jorda, blir redusert med 6,0 % for hvert slag.

a) Hvor mange slag må de minst slå for å få stolpen mer enn 1,0 meter ned i jorda?

b) Kan firmaet klare å slå stolpen så mye som 2,2 meter ned i jorda med denne pælemaskinen?

Oppgave 2 (6 poeng)

En linje ℓ går gjennom punktene $A(7\,,12\,,12)$ og $B(1\,,-6\,,-12)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ.

En kuleflate *K* har sentrum i origo og radius 5.

b) Bestem skjæringspunktene mellom linjen ℓ og kuleflaten *K*.

Et plan α er gitt ved

$$\alpha:\; 4x-3y+7=0$$

Det er to plan som er parallelle med α, og som samtidig tangerer kuleflaten *K*.

c) Bestem likningen for hvert av disse planene.

Oppgave 3 (6 poeng)

Bestanden av ørret i et bestemt fiskevann avtar med 3,0 % per år.
Vi går ut fra at det er 10 000 ørreter i vannet ved starten av 2018.

a) Forklar at differensiallikningen gitt ved

$$y' = -0,03y \ , \quad y(0) = 10\,000$$

kan brukes til å bestemme ørretbestanden $y(t)$ i vannet t år etter starten av 2018.

b) Løs differensiallikningen.
Hvor mange ørreter vil det være i vannet i 2028?

Den lokale fiskeforeningen ønsker å sette ut et fast antall ørreter i vannet hvert år i ti år framover. Utsettingen starter tidlig i 2018 og skjer kontinuerlig over tiårsperioden. Målet er at det ved starten av 2027 skal være 15 000 ørreter i vannet.

c) Sett opp og grunngi en differensiallikning som kan brukes til å bestemme hvor mange ørreter de må sette ut hvert år for å nå målet.

d) Hvor mange ørreter må de sette ut hvert år for å nå målet?

Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\sqrt{2^2-x^2} \quad , \quad x\in[-2,\ 2]$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.
Tegn også inn linjen gitt ved $g(x)=f(1)$ i samme koordinatsystem som grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme arealet av sirkelsegmentet avgrenset av grafene til f og g.

Vi dreier dette sirkelsegmentet $360°$ om x-aksen.

c) Bruk CAS til å bestemme volumet av omdreiningslegemet vi da får.

Funksjonen F er gitt ved

$$F(x)=\sqrt{r^2-x^2} \quad , \quad x\in[-r,\ r] \quad , \quad r>1 .$$

Linjen gitt ved $G(x)=F(1)$ skjærer grafen til F i punktene $(-1,\ F(-1))$ og $(1,\ F(1))$.
Området mellom grafene til F og G er et sirkelsegment. Vi roterer dette sirkelsegmentet $360°$ om x-aksen.

d) Vis ved hjelp av CAS at volumet av omdreiningslegemet vi da får, er uavhengig av r.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no