Vektorit ja CAS

Vektori $\bar{a} = 4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 6\bar{k}$ esitetään laskimessa muodossa a:= [4,-2,6]. Pisteen (2,-3,5) paikkavektori (eli origosta alkava annettuun pisteeseen päättyvä vektori) on siis laskimen esitysmuodossa [2,-3,5].

Tehtäväsarja 1

© Määritä vektori AB

© Paikkavektoreiden erotuksena saamme

$[1 \;\; -3 \;\; 6]-[3 \;\; 2 \;\; -4]$ $\quad [-2 \;\; -5 \;\; 10]$

© Määritä vektori BA

$[3 \;\; 2 \;\; -4]-[1 \;\; -3 \;\; 6]$ $\quad [2 \;\; 5 \;\; -10]$

© Määritä janan AB keskipiste

© Keskipisteen paikkavektori on päätepisteiden paikkavektoreiden keskiarvo

$\dfrac{[3 \;\; 2 \;\; -4]+[1 \;\; -3 \;\; 6]}{2}$ $\quad \left[2 \;\; \dfrac{-1}{2} \;\; 1\right]$

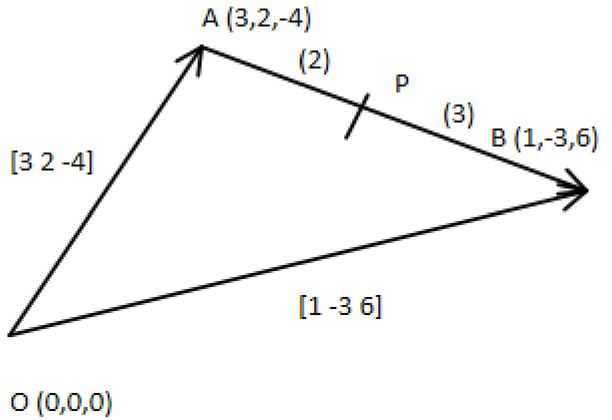
© Vastaus : Keskipiste on $\left(2, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$

© Piste P jakaa janan AB suhteessa 2:3. Määritä piste P.

© Pisteen P paikkavektori saadaan jakosuhdevektorin kaavalla (MAOL–taulukko)

$\dfrac{2\cdot[1 \;\; -3 \;\; 6]+3\cdot[3 \;\; 2 \;\; -4]}{2+3}$ $\quad \left[\dfrac{11}{5} \;\; 0 \;\; 0\right]$

© Vastaus: P=(11/5,0,0)



Tehtäväsarja 2

Olkoon $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}$ ja $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

$a:=[3 \quad -2 \quad -4]$	$[3 \quad -2 \quad -4]$
$b:=[1 \quad 2 \quad 2]$	$[1 \quad 2 \quad 2]$
© Laske vektoreiden a ja b pituudet.	
$\mathrm{norm}(a)$	$\sqrt{29}$
$\mathrm{norm}(b)$	3
© Laske vektoreiden a ja b pistetulo a· b.	
$\mathrm{dotP}(a,b)$	-9
© Laske vektoreiden a ja b välinen kulma	
$\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(a,b)}{\mathrm{norm}(a)\cdot \mathrm{norm}(b)}\right)$	123.854514813
© Laske vektorin a vektoriprojektio vektorilla b. (Kaava on MAOL–taulukossa)	
$\frac{\mathrm{dotP}(a,b)}{\mathrm{dotP}(b,b)}\cdot b$	$[-1 \quad -2 \quad -2]$

Tehtäväsarja 3

© Määritä kuvassa olevan tunnetun vektorin c loppupiste B, kun alkupiste A=$(2,1,-3)$.

© Vektorin esitys i,jk−muodossa on tunnettu ja muunnamme sen laskinmuotoon

$c:=[3 \quad 2 \quad 4]$ $\qquad [3 \quad 2 \quad 4]$

© Pisteen A paikkavektori on

$a:=[2 \quad 1 \quad -3]$ $\qquad [2 \quad 1 \quad -3]$

© Pisteen B paikkavektori on kuvan perusteella

$b:=a+c$ $\qquad [5 \quad 3 \quad 1]$

© Vastaus: Piste B on $(5,3,1)$

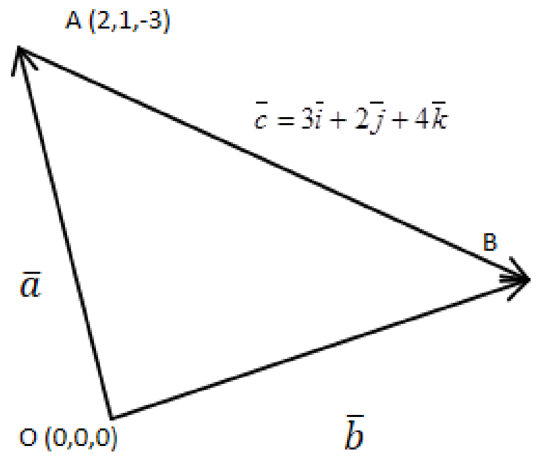
© Tapa 2 ratkaista sama tehtävä: Olkoon pisteen B paikkavektori $[x \; y \; z]$

$b:=[x \quad y \quad z]$ $\qquad [x \quad y \quad z]$

© Muodostetaan vektoreiden välinen yhtälö ja ratkaistaan siitä muuttujat x,y,z :

$\text{solve}(b-a=c,\{x,y,z\})$ $\qquad x=5$ and $y=3$ and $z=1$

© Vastaus: Piste B on $(5,3,1)$



Tehtävä 4 (S2013 5)

Pisteestä $A(1,-1,0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\overline{i}-4\overline{k}$ suuntaan pisteeseen C. Määritä pisteen C koordinaatit.

© Vektorin a suuntainen yksikkövektori saadaan komennolla unitv(a)

© Muodostetaan pisteen c paikkavektori

$[1\ \ {-1}\ \ 0]+9\cdot \text{unitV}([1\ \ {-2}\ \ 2])+10\cdot \text{unitV}([3\ \ 0\ \ {-4}])$ $\qquad [10\ \ {-7}\ \ {-2}]$

© Piste C = $(10, -7, -2)$

Tehtävä 5 Olkoon $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$ ja $\bar{b} = 5\bar{i} - 10\bar{j} + (t+1)\bar{k}$. Millä t:n arvolla vektorit ovat yhdensuuntaiset?

$a{:=}\begin{bmatrix} 1 & ^-2 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & ^-2 & 4 \end{bmatrix}$

$b{:=}\begin{bmatrix} 5 & ^-10 & t+1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 5 & ^-10 & t+1 \end{bmatrix}$

© a ja b ovat yhdensuuntaiset, jos ne toteuttavat vektoriyhtälön a=rb, missä r on reaaliluku

$\text{solve}(a=r\cdot b,\{r,t\})$ $\qquad$ $r=\frac{1}{5}$ and $t=19$

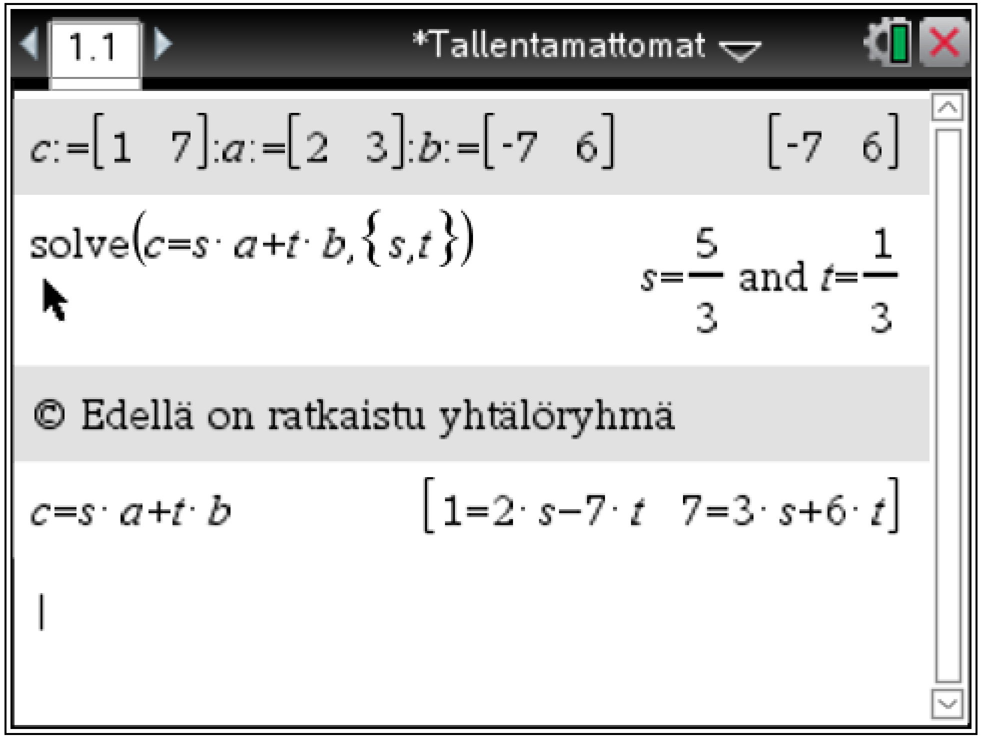
© Lisähuomautus: Vektoriyhtälön ratkaiseminen tarkoittaa seuraavanlaisen yhtälöryhmän ratkaisemista

$a=r\cdot b$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1=5\cdot r & ^-2=^-10\cdot r & 4=r\cdot (t+1) \end{bmatrix}$

Vastaus: t=19

Tehtävä 6 (S 2006 4)

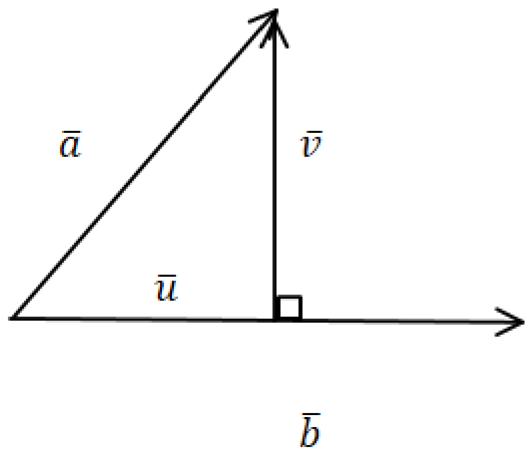
Jaa vektori $\bar{i}+7\bar{j}$ vektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i}+3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -7\bar{i}+6\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

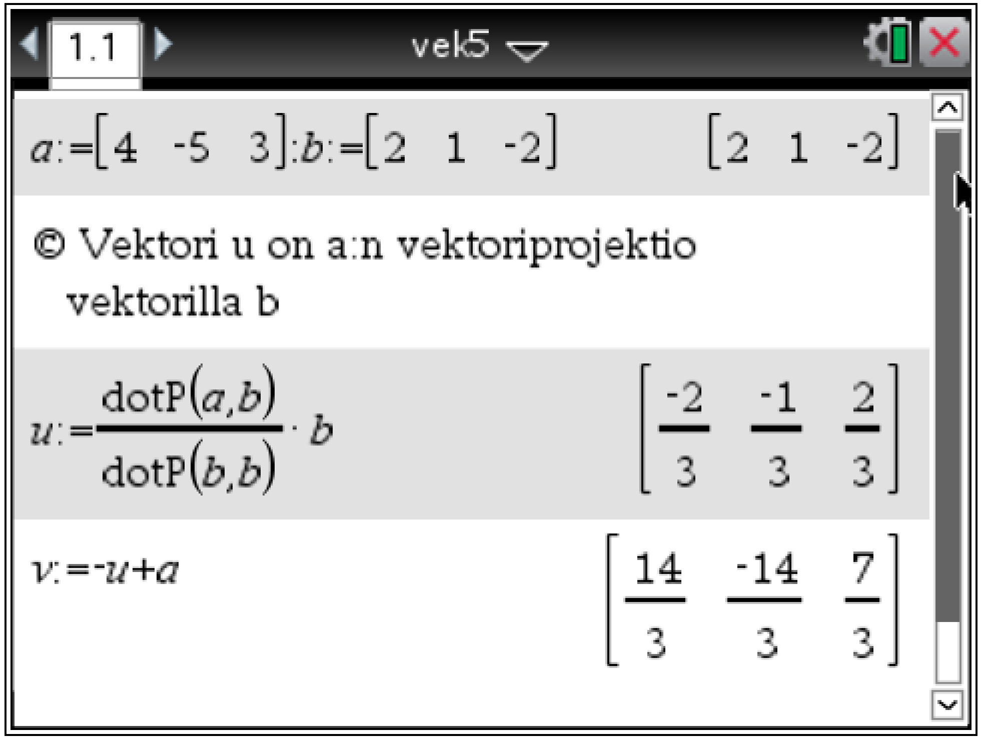


Vastaus: $\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} = \frac{5}{3}\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$

Tehtävä 7 (K11 8)

Olkoon $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. Esitä vektori $\overline{a}$ summana vektoreista $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista $\overline{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja $\overline{v}$ kohtisuorassa vektoria $\overline{b}$ vastaan.





Tehtävä 8 (K 2006 6)

Tutki, ovatko pisteet P=(4,1,-2) ja Q=(0,2,4) pisteiden A=(1,1,1) ja B=(-1,1,3) määräämällä suoralla.

© MAOL:n taulukon suoran vektoriyhtälö > suoran AB pisteen paikkavektori on

$a:=[1\ \ 1\ \ 1]+t\cdot([-1\ \ 1\ \ 3]-[1\ \ 1\ \ 1])$ $\quad [1-2\cdot t\ \ 1\ \ 2\cdot t+1]$

© Tutkitaan onko piste P=(4,1,−2) suoralla AB

$\mathrm{solve}(a=[4\ \ 1\ \ -2],t)$ $\quad t=\frac{-3}{2}$

© Piste P on suoralla AB

© Tutkitaan onko piste Q=(0,2,4) suoralla AB

$\mathrm{solve}(a=[0\ \ 2\ \ 4],t)$ $\quad$ false

© Piste Q ei ole suoralla AB

Tehtävä 9 (K 2013 7)

Pisteiden A(2,0,1) ja B(3,1,3) yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin.

© Pisteiden A(2,0,1) ja B(3,1,3) yhdysjanan keskipisteen paikkavektori

$kp:=\dfrac{[2\ \ 0\ \ 1]+[3\ \ 1\ \ 3]}{2}$ $\qquad\left[\dfrac{5}{2}\ \ \dfrac{1}{2}\ \ 2\right]$

© Tason normaalivektori

$n:=[3\ \ 1\ \ 3]-[2\ \ 0\ \ 1]$ $\qquad[1\ \ 1\ \ 2]$

© Sovelletaan MAOL:n taulukosta tason vektoriyhtälöä joka tuottaa tason normaalimuotoisen yhtälön

$\mathrm{dotP}(n,[x\ \ y\ \ z]-kp)=0$ $\qquad x+y+2\cdot z-7=0$

© y−akselin leikkauspisteessä x=z=0

$\mathrm{solve}(0+y+2\cdot 0-7=0,y)$ $\qquad y=7$

© Leikkauspiste on (0,7,0)

Tehtävä 10

Onko piste (-1,-3,6) pisteiden (1,3,2), (-2,1,5) ja (2,-1,3) määräämässä tasossa?

© Tason yhtälö vektorimuodossa

$p:=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}+r\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\right)+s\cdot\left(\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\right)$

$\begin{bmatrix}-3\cdot r+s+1 & -2\cdot r-4\cdot s+3 & 3\cdot r+s+2\end{bmatrix}$

$\text{solve}\left(p=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 6\end{bmatrix},\{r,s\}\right)$ $\quad r=1 \text{ and } s=1$

© Piste $(-1,-3,6)$ *on kyseisen kolmen pisteen määräämässä tasossa*.